t- Test für unabhängige Stichproben

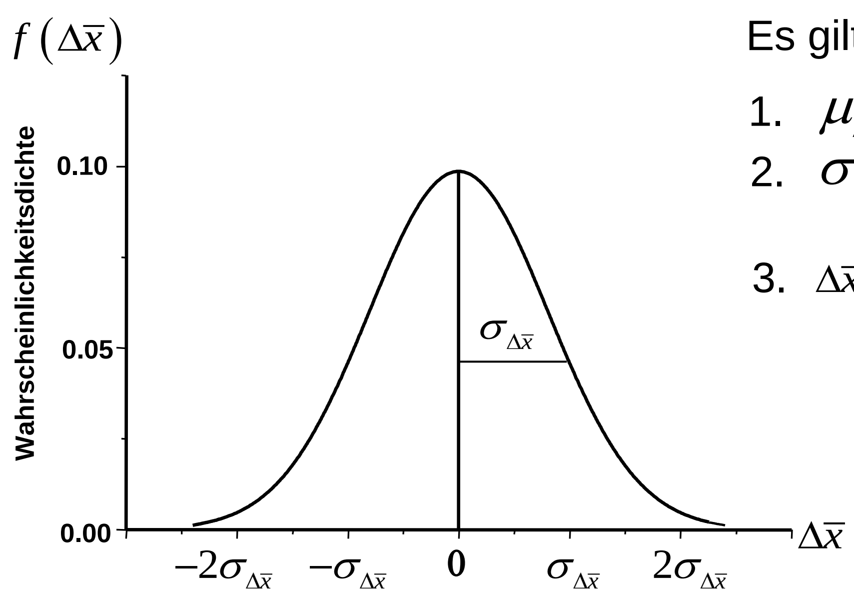
Hypothese

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_0 \qquad H_0 : \mu_1 = \mu_0 \qquad \text{(ungerichtet)}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_{\Delta\bar{x}} = 0$$

H0: Der Erwartungswert der Differenzen von Mittelwerten ist Null

Sampling Distribution



Es gilt:

1. $\mu_{\Delta\bar{x}} = 0$
2. $\sigma_{\Delta\bar{x}}$ wird geschätzt aus beiden Stichproben
3. $\Delta\bar{x}$ ist t- verteilt.

[t-Test ausführlich?]

t- Test für unabhängige Stichproben

Statistik

$$t = \frac{\Delta \overline{x}}{\sigma_{\Delta \overline{x}}} \qquad \sigma_{\Delta \overline{x}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{pooled} \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1} \right)}$$

Prüfgrösse t- verteilt mit $n_0 + n_1 - 2$ Freiheitsgraden

Entscheidung:

a) Krit. t-Wert

$$|t| > t_{(df;1-\alpha/2)}$$ ➡ Ablehnung von H0, sonst Beibehaltung

oder

b) Überschreit-ungs-WK

$$P\left(|t'| \geq |t|\right) < \alpha$$ ➡ Ablehnung von H0, sonst Beibehaltung

Voraussetzung

1. **Für $n_0 + n_1 < 50$ normalverteilte Stichprobendaten**
2. **Homogene Stichprobenvarianzen**
3. **Unabhängige Messeinheiten innerhalb und zwischen den Samples.**

Hotelling's T² - Test für unabhängige Stichproben

Kenngrößen

$$\underset{(p\times 1)}{\bar{\mathbf{x}}_0} = \frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_1}\mathbf{x}_{0i} \qquad \underset{(p\times 1)}{\bar{\mathbf{x}}_1} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\mathbf{x}_{1i}$$

$$\underset{(p\times p)}{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_0} = \frac{1}{n_0 - 1}\sum_{i=1}^{n_0}\left(\mathbf{x}_{0i} - \bar{\mathbf{x}}_0\right)\left(\mathbf{x}_{0i} - \bar{\mathbf{x}}_0\right)'$$

$$\underset{(p\times p)}{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_1} = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\mathbf{x}_{1i} - \bar{\mathbf{x}}_1\right)\left(\mathbf{x}_{1i} - \bar{\mathbf{x}}_1\right)'$$

Mittelwertevektoren und Varianz-Covarianz Matrizen für jede Gruppe.

Gepoolte Var-Covar-Matrix

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{pooled} = \frac{(n_0 - 1)\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_0 + (n_1 - 1)\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_1}{n_0 + n_1 - 2}$$

Hotelling's T² - Test für unabhängige Stichproben

Kenngrößen

$$\bar{\mathbf{x}}_1 \qquad \bar{\mathbf{x}}_1 \qquad \hat{\mathbf{\Sigma}}_{pooled}$$

T² - Statistik

$$T^2 = \left(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_0\right)' \left(\left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1}\right)\hat{\mathbf{\Sigma}}_{pooled}\right)^{-1} \left(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_0\right)$$

Entscheidung

Lehne die H0 auf Signifikanzlevel α ab, wenn gilt

$$\boxed{T^2 > \frac{\left(n_0 + n_1 - 2\right)p}{\left(n_0 + n_1 - p - 1\right)} F_{(p;n_0+n_1-p-1)}\left(1-\alpha\right)}$$

Mit *F* (1-α) dem (1-α) Quantil der F- Verteilung mit p Zählerfreiheitsgraden und n_0+n_1-p-1 Nennerfreiheitsgraden.