Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Wahrscheinlichkeitsbegriff

- Anfänge Mitte des 17. Jh. (Huygens, Pascal, Fermat, Bernoulli). Aufgaben des Glücksspiels. Nur arithmetische und kombinatorische Methoden.
- Weiterentwicklungen im 18.-19. Jh. durch Laplace, Gauss und Poisson. (Theorie der Beobachtungsfehler, Ballistik, Bevölkerungssstatistik).
- Durchbruch zu Beginn des 20. Jh. Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie, Fundament in axiomatischen Aufbau (Kolmogoroff). Theorie der stochastischen Prozesse (Wiener, Markoff, Chintchin). Partikelphysik.
- Heute zentraler Bestandteil wiss. Betätigung: Informations- und Kommunikationstheorie, Teilchenphysik, Bevölkerungsstatistik, Populationsdynamik, Epidemiologie, Dosis-Wirk-Diagnostik, Materialprüfung, Statik, Personalauswahl, psychologische Testung, Versuchsplanung und Stichprobentheorie.

1.1 Intuitive Vorstellungen über Zufälligkeit

Fragebeispiele: Wie viele Anrufe wird die Feuerwehrzentrale heute abend erhalten? Wieviel Prozent mehr Ausschuß wird eine Maschine produzieren, wenn die Taktrate 10% schneller gestellt wird? Wie lange wird die Reparatur einer Turbine dauern? Wann wird ein Deich brechen, wenn er einem konstanten hohen Druck von x- Bar ausgesetzt ist? Wie viele von denen, die einen Eignungstest bestehen, sind auch wirklich für den Beruf geeignet? Um etwas über zufällige Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit lernen zu können, müssen die betrachteten Ereignisse zwei Bedingungen erfüllen:

1. Die Ereignisse müssen *wiederholbar* sein;

2. Für die Ereignisse muss eine *Stabilität in der relativen Häufigkeit ihres Eintretens* beobachtbar sein. (Ereignis A, $h(A) = n_A/n$, n_A die Anzahl des Auftretens von A, n die Gesamtanzahl der Beobachtungen (groß))

Eine Schätzung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A könnte lauten:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter einem bestimmten Komplex von Bedingungen das Ereignis **A** eintritt, ist P, wobei P eine stabile relative Häufigkeit ist. In einer ähnlichen Form hat Richard von Mises (1936) vorgeschlagen, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A zu definieren. Nach von Mieses definiert

$$P(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A. Hierbei ist n die Gesamtzahl der Versuche und n_A ist die Gesamtzahl der Versuche, bei denen A beobachtet wurde. Wird n größer, so wächst auch n_A entsprechend an, der Quotient n_A/n strebt dabei gegen einen Grenzwert $P(A)$. Man nennt diese Definition auch die statistische Wahrscheinlichkeitsdefinition (oder a-posteriori Definition), da keine a-priori Annahmen über die Ereignisse gemacht werden, die Wahrscheinlichkeit wird nur induktiv über den Weg der Beobachtung gewonnen. Allerdings muß dabei angenommen werden, daß ein Grenzwert *überhaupt existiert*, dem die relative Häufigkeit zustrebt.

1.2 Klassische Wahrscheinlichkeitsdefinition

Wir stellen uns vor, durch die Eigenschaften von Objekten sei garantiert, daß bestimmte Ereignisse alle mit *gleicher Möglichkeit* auftreten (Würfel, Münzwurf).[1] Bei jedem Versuch können also n unvereinbare und gleichmögliche Ergebnisse auftreten: $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Wir nennen diese Ereignisse *Elementarereignisse*(im engen Sinne). Wir betrachten aber auch noch andere Ereignisse, die durch Verknüpfungen aus den Elementarereignissen hervorgehen (zufällige Ereignisse, Beispiel: Beim Würfeln eine gerade Zahl werfen, eine Zahl größer 4 werfen etc.). Solche Ereignisse gehören dann zu Mengen von Elementarereignissen. Beispiel: Würfeln.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ A &= \{2, 4, 6\} \end{aligned}$$

Das Ereignis A hat die Mächtigkeit von $n_A = 3$. Wir definieren dann

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

[1] Diese Setzung führt zu einem Zirkelschluss bei der Definition der Wahrscheinlichkeit, da der Begriff der "Gleichmöglichkeit" bereits den zu erklärenden Begriff der Wahrscheinlichkeit voraussetzt. Die "klassische" Definition ist aus diesem Grund unzulänglich und wurde durch die axiomatische Definition vollständig ersetzt.

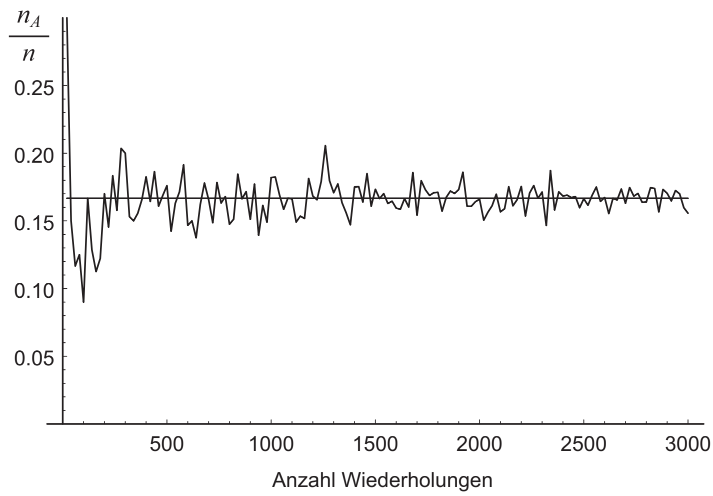

Abbildung 1.1: Veranschaulichung der Konvergenz der relativen Häufigkeit eines Ereignisses gegen die *Wahrscheinlichkeit* dieses Ereignisses. Erhöht man beim Würfeln die Anzahl der Wiederholungen, teilt die Anzahl der Ereignisse, in denen eine bestimmte Augenzahl aufgetreten ist (z.B. eine 'Sechs' werfen) durch die Anzahl der Wiederholungen (gesamten Würfe) und trägt diese Zahl gegen die Anzahl der Wiederholungen auf, beobachtet man, daß diese Zahl immer näher an 1/6 liegt, je größer die Anzahl der Wiederholungen ist.

als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A (Klassische Definition). Man bezeichnet sie auch als Definition der WK über die *Mächtigkeit von Mengen*. Zweites Beispiel: Welche Wahrscheinlichkeiten sind den Summen der Augenzahlen bei zweimaligem Würfeln (oder beim gleichzeitigen Werfen von 2 Würfeln, die Reihenfolge der Augenzahlen interessiert nicht) zugeordnet?

Augenzahl:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit:	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabelle 1.1: Die Wahrscheinlichkeiten für Augenzahlen bei zweimaligem Würfeln.

Allgemein kann man aus n Elementarereignissen $\binom{n}{m}$ Ereignisse der Ordnung m bilden (Warum das so ist, sehen wir später). Insgesamt kann man

$$\sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} = 2^n - 1$$

Ereignisse aus einer Menge mit n Elementarereignissen bilden. Man fügt den Ereignissen noch das sog. *unmögliche Ereignis* (die leere Menge) hinzu (es kann nicht auftreten, denn ihm entspricht kein Elementarereignis). Damit gibt es 2^n mögliche Ereignisse.

1.3 Verallgemeinerungen und axiomatische Definition

Gegeben sei ein Komplex von Bedingungen Ξ, welcher das Auftreten von Ereignissen A,B und Verflechtungen zwischen diesen bedingt. Wenn ein Ereignis A stets auch ein Ereignis B nach sich zieht (impliziert), schreiben wir:

$$A \subset B$$

umgekehrt

$$B \subset A.$$

WürfelBeispiel: A=gerade Zahl, B=$\{2\}$, $B \subset A$. Wenn entweder beide Ereignisse A und B auftreten oder beide nicht auftreten, so sind beide Ereignisse *gleichwertig*

$$A = B.$$

Treten beide Ereignisse A und B *gleichzeitig* ein schreiben wir

$$A \cap B.$$

WürfelBeispiel: A=gerade Zahl, B=größer 3, $C = A \cap B = \{4, 6\}$.
Enweder A oder B oder beide treten ein (mindestens eins von beiden tritt ein):

$$A \cup B.$$

B tritt ein immer dann, wenn A nicht eintritt:

$$B = \overline{A}$$

(B) ist das Komplement zu A.

Ein Ereignis heißt *sicher*, wenn es mit Notwendigkeit eintritt (bei jeder Realisierung des Komplexes Ξ eintritt. Würfeln: Augenzahl größer 0), unmöglich, wenn es niemals unter Bedingung von Ξ vorkommen kann.

$$\begin{aligned} \Omega &: \text{ ”sicheres Ereignis”} \\ \emptyset &: \text{ ”unmögliches Ereignis”} \end{aligned}$$

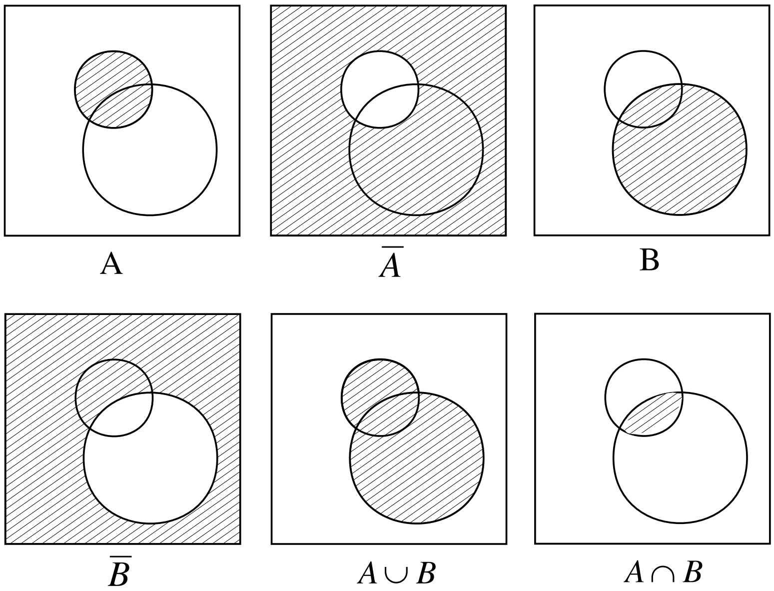

Abbildung 1.2: Der Komplex Ξ bestehe darin, daß auf gut Glück ein Punkt innerhalb des Quadrates gewählt wird. Ereignis A ist dann definiert als ”der Punkt liegt innerhalb des Kreises A”, entsprechend ist B definiert.

Dann gilt

$$\begin{aligned} A \cup \overline{A} &= \Omega \\ A \cap \overline{A} &= \emptyset \end{aligned}$$

also

$$\overline{A} = \Omega - A.$$

Zwei Ereignisse heißen (paarweise) unvereinbar, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt. Gilt

$$A = B_1 \cup B_2 \cup, \ldots, \cup B_n$$

und sind die Ereignisse B_i paarweise miteinander unvereinbar, d.h. $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$, dann sagt man, A läßt sich in die Teilereignisse B_i zerlegen. Wenn stets mindestens eines der B_i eintritt, d.h.

$$\Omega = B_1 \cup B_{2,} \ldots, \cup B_n$$

so bilden die B_i ein *vollständiges System paarweiser unvereinbarer Ereignisse*. Ein solches System bilden z.B. beim Würfeln die Elementarereignisse $E_1, \ldots, E_6$. Wichtig aber ist, daß

die Annahme der *Gleichwahrscheinlichkeit* nicht gemacht werden muß, es reicht, wenn die B_i ein vollständiges System bilden. Für den Begriff des Elementarereignisses kann also die Forderung der Gleichwahrscheinlichkeit fallen gelassen werden.
Man hat es stets mit einem Komplex Ξ von Bedingungen und und irgendeiner Gesamtheit $\mathfrak{A}$ von Ereignissen zu tun. Wir machen folgende Annahmen:

1. Gehören der Gesamtheit $\mathfrak{A}$ von Ereignissen die Ereignisse A und B an, so gehören ihr auch die Ereignisse $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ (A ohne B) an.

2. $\mathfrak{A}$ enthält die sicheren und die unmöglichen Ereignisse.

Eine Gesamtheit, die diesen Annahmen genügt, heißt *Ereignisalgebra*. Konstruktion einer Ereignisalgebra:

- Erstelle eine Menge von Elementarereignissen. Zum Beispiel ein Zufallsdreieck $\Omega = \{S_1, S_2, S_3\}$.

- Bilde die Gesamtheit $\mathfrak{A}$ aus dem sicheren Ereignis Ω, dem unmöglichen Ereignis $\emptyset$, allen Ereignissen $\{E_k\}$ von Ω und allen Ereignissen, die sich in Elementarereignisse zerlegen lassen. Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \{\Omega, \emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1 \cup S_2\}, \{S_1 \cup S_3\}, \{S_2 \cup S_3\}\} \\ &= \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}, \{S_2, S_3\}, \{S_1, S_2, S_3\}\} \end{aligned}$$

  (Es läßt sich zeigen, daß Summe, Differenz und Produkt irgendwelcher Ereignisse aus $\mathfrak{A}$ wieder in $\mathfrak{A}$ liegen.)

Es kann gezeigt werden, daß jedem Ereignis A, das einer Ereignisalgebra angehört, eine wohlbestimmte Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zugewiesen werden kann. Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ ist eine auf der Ereignisalgebra $\mathfrak{A}$ definierte *Funktion* des Ereignisses A. Diese Funktion besitzt die folgenden Eigenschaften:

$\mathbf{A_1}$: Für jedes Ereignis der Algebra $\mathfrak{A}$ gilt: $P(A) \geq 0$.

$\mathbf{A_2}$: Für das sichere Ereignis gilt: $P(\Omega) = 1$.

$\mathbf{A_3}$: Läßt sich das Ereignis A in die unvereinbaren Teilereignisse B und C zerlegen und gehören alle drei Ereignisse der Algebra $\mathfrak{A}$ an, so gilt $P(A) = P(B) + P(C)$. (Additionstheorem der Wahrscheinlichkeiten).

Die in $\mathbf{A_1} - \mathbf{A_3}$ aufgelisteten Eigenschaften sind die Axiome, die Kolmogoroff (1933) aufgestellt hat. Sie bilden den mengentheoretisch begründeten, *axiomatischen* Wahrscheinlichkeitsbegriff. Diese Definition ist formal und frei von Annahmen über a-priori Eigenschaften, mit denen die Elementarereignisse behaftet sind. Eine Laplace - Wahrscheinlichkeit ist somit immer auch eine kolmogoroffsche Wahrscheinlichkeit, aber nicht umgekehrt.

Folgerungen:

Offensichtlich folgt aus $\mathbf{A_1}$ und $\mathbf{A_2}$ sofort $0 \leq P(A) \leq 1$. Weiter hat man folgende elementare Implikationen:

1. Wegen $A \cup \overline{A} = \Omega$ gilt mit (2) und (3)

$$P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1.$$

2. Aus der Komplementarität der Ereignisse Ω und $\emptyset$ folgt sofort

$$P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 \tag{1.1}$$

und mit $\mathbf{A_2}$ folgt

$$P(\emptyset) = 0. \tag{1.2}$$

3. Wenn gilt $A \subset B$ (das Ereignis A impliziert das Ereignis B), so gilt

$$P(A) \leq P(B).$$

Es ist ja

$$B = B \backslash A \cup A$$

(s. Abb. 1.3a) und wegen $\mathbf{A_3}$ folgt dann

$$P(B) = P(B \backslash A) + P(A). \tag{1.3}$$

Da $P(B \backslash A) \geq 0$ folgt der Satz.

4. Für das Ereignis $A \backslash B$ (A ohne B) gilt

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Es gilt ja

$$A = (A \backslash B) \cup (A \cap B) \tag{1.4}$$

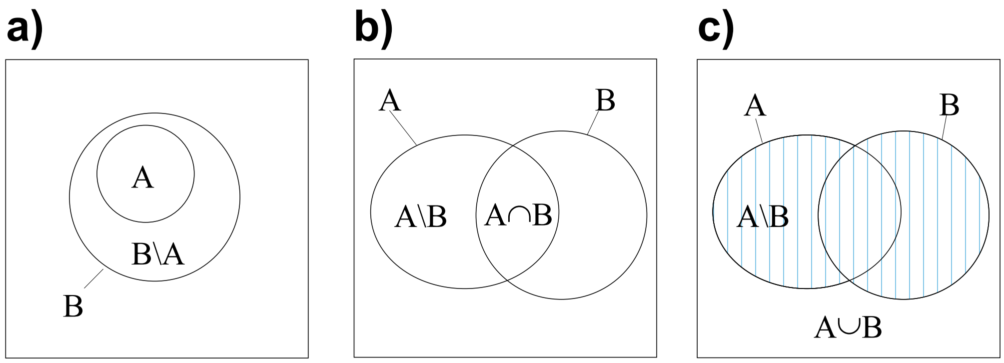

Abbildung 1.3: Mengenbilder zur Veranschaulichung der Folgerungen aus den Axiomen von Kolmogoroff.

(s. Abb. 1.3b) und dann mit $\mathbf{A_3}$

$$P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B) \tag{1.5}$$

woraus

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B) \tag{1.6}$$

folgt.

5. Für die Vereinigung $A \cup B$ gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1.7}$$

(allgemeiner Additionssatz der Wahrscheinlichkeit).

Es gilt ja

$$P(A \cup B) = P(A \backslash B) + P(B) \tag{1.8}$$

(s. Abb. 1.3c) und da $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$ (s.o.), gilt

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \backslash B) + P(B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B). \end{aligned}$$

Von obigen Folgerungen wird im folgenden umfassend Gebrauch gemacht.

1.4 Erweiterungen, Anwendungen und Beispiele

Wir betrachten als Beispiel ein einfaches Zufallsexperiment, welches darin besteht, dass wir 3 mal hintereinander eine Münze werfen. Wir notieren dabei für jeden möglichen Ausgang dieses Experimentes, wie viele Male ”Kopf”gefallen ist. Die möglichen Ausgänge dieses Experimentes sind alle 3-er Reihenfolgen, die man mit den Zeichen ”K”,”Z”bilden kann. Tabelle (1.2) zeigt diese.

Folge:	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8
	K	K	K	K	Z	Z	Z	Z
	K	K	Z	Z	Z	Z	K	Z
	K	Z	K	Z	Z	K	Z	Z
Anzahl ”K”:	3	2	2	1	0	1	1	2

Tabelle 1.2: Die 8 möglichen Folgen $F_1 - F_8$ des Zufallsexperimentes ”3 maliger Münzwurf”.

Wir halten folgendes über dieses Zufallsexperiment fest:

1. Es gibt 8 mögliche Ausgänge des Zufallsexperimentes. Diese bilden den zugrundeliegenden Stichprobenraum Ω.

2. Alle 8 Ausgänge erscheinen uns ”gleich möglich”. Es handelt sich also um ein Laplace Experiment.

Wir wollen aber für dieses Zufallsexperiment bestimmte Ereignisse betrachten, nämlich die Anzahl, mit der ”K” erscheint. Diese Anzahl bezeichnen wir mit X. X ist eine *Zufallsvariable*, sie kann zufällig Werte aus dem Wertebereich

$$X = \{0, 1, 2, 3\} \tag{1.9}$$

annehmen. Schauen wir uns die Regel an, nach deren Maßgabe X Werte annimmt, so sehen wir, dass dies aufgrund einer Zusammenfassung der Elementarereignisse zu neuen Partitionen des Stichprobenraumes Ω geschieht (s. Abb. (1.4).

Offenbar ist eine Zufallsvariable eine *Funktion*, die disjunkten Mengen von Elementarereignissen des Stichprobenraumes Ω Zahlen zuweist, eben die Werte der Zufallsvariablen. Und diese haben in Laplace Experimenten aufgrund der Mächtigkeit der Mengen der zugehörigen Elementarereignisse entsprechende Wahrscheinlichkeiten. Ein bestimmter Wert der Zufallsvariablen, x, wird also durch eine bestimmte Anzahl von gleichwahrscheinlichen und disjunkten

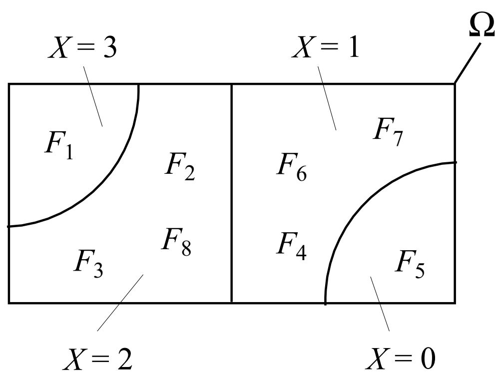

Abbildung 1.4: Die Werte der Zufallsvariablen $X = $ Anzahl "Kopf" bei dreimaligem Münzwurf beruhen auf einer Neupartitionierung des Stichprobenraumes Ω.

Elementarereignissen realisiert. Und diese Anzahl realisiert die Wahrscheinlichkeit dieses Wertes. Wir können also für die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ schreiben:

$$P(X = x) = \frac{n_x}{n} \tag{1.10}$$

wobei n_x die Anzahl der für den Wert x günstigen Elementarereignisse ist und n die Anzahl aller Elementarereignisse (der Umfang des Stichprobenraumes, $|\Omega|$). In unserem Beispiel finden wir (s. Tab. (1.3):

$X:$	0	1	2	3
$P(X):$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Tabelle 1.3: Die Wahrscheinlichkeiten für die Werte der Zufallsvariablen $X = $ Anzahl "Kopf"bei dreimaligem Münzwurf.

Wir betrachten noch ein weiteres Beispiel. Wir definieren X als die Summe der Augenzahlen beim Würfeln mit zwei Würfeln. Wie haben eben gesehen, dass eine Zufallsvariable eine Funktion auf dem Stichprobenraum Ω ist. Wir können daher für den Wertebereich von X schreiben

$$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}. \tag{1.11}$$

Da die Menge der Elementarereignisse Ω gegeben ist über die Menge der 2er Tupel

$$\Omega = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\} \tag{1.12}$$

kann man die Zufallsvariable X definieren als

$$X(a, b) = a + b. \tag{1.13}$$

Wir schreiben die Werte von X in eine Tabelle, die uns gestattet, durch einfaches Abzählen die zugehörige Verteilung der Wahrscheinlichkeiten über die Werte der Zufallsvariable zu ermitteln (s. Tab. (1.4)).

	1. Würfel					
2. Würfel	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tabelle 1.4: Die Summen der Würfelaugen beim Werfen von 2 Würfeln. Die Längen der Diagonalen von linke nach rechts sind die Anzahl der für jede Würfelaugensumme günstigen Ereignisse.

Durch einfaches Abzählen gelangen wir zu der Wahrscheinlichkeitsverteilung für X (s. Tab. (**??**):

$X:$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X):$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabelle 1.5: Die Wahrscheinlichkeiten für die Augensummen beim Werfen zweier Würfel.

Kapitel 2

Kombinatorik

In Laplace Experimenten gelangt man durch Abzählen der Anzahl der Elementarereignisse, die für ein bestimmtes Ereignis günstig sind, zu der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses. Nur ist das Abzählen in vielen Situationen nicht so einfach bzw. es können grosse Zahlen auftreten, die ein manuelles Abzählen praktisch unmöglich machen. Es lohnt daher ein Blick auf *Abzählprinzipien*. Als einfaches generelles Prinzip des Abzählens kann man festhalten:

Definition 2.1 *Kann man einen k- fach wiederholten Vorgang zunächst auf n_1 Weisen, danach auf n_2 Weisen, zuletzt auf n_k Weisen ausführen, dann gibt es*

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k \tag{2.1}$$

Weisen zur Ausführung des gesamten Vorgangs.
*Wir nennen dieses Prinzip **fundamentales Abzählprinzip**.*

Wir fügen noch eine weitere nützliche Definition hinzu.

Definition 2.2 *Die **Fakultät** einer natürlichen Zahl n ist erklärt als*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1. \tag{2.2}$$

Weiterhin gilt:

$$0! = 1. \tag{2.3}$$

Wir betrachten im folgenden zunächst die Anwendung des fundamentalen Abzählprinzips auf *Reihenfolgen*.

2.1 Permutationen (Geordnete Auswahlen von Elementen)

Zunächst betrachten wir einführend einige beispielhafte Problemstellungen.

Problem 2.1 *Man habe 8 Personen und eine Stuhlreihe mit 8 Stühlen. In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können die 8 Personen sich hinsetzen?*

Problem 2.2 *Gegeben sei ein Kartenspiel mit 32 Spielkarten. Wie viele mögliche Reihenfolgen ergibt ein ”Ziehen und Ablegen Versuch”, bei dem man dreimal hintereinander ziehen darf?*

Problem 2.3 *Man soll Holzbuchstaben aus einem Kasten ziehen. Wie viele verschiedene 4-Buchstaben Wörter kann man legen?*

Alle drei Probleme gehorchen demselben Schema. Erstens haben wir eine Auswahl aus n Elementen. Bei der Stuhlreihe (Problem 2.1) sind es 8, bei der Kartenreihe (Problem 2.2) 32 und bei den Holzbuchstaben (Problem 2.3) 26. Zweitens müssen Elemente auf k Plätzen angeordnet werden, bei der Stuhlreihe auf 8 (also genausoviel Plätzen wie Elementen), bei der Kartenreihe auf 3 und bei den Holzbuchstaben auf 4 (also auf weniger Plätzen als Elemente verfügbar sind). Drittens reduziert sich die Auswahl für den nächsten Platz durch jede vorherige Auswahl um genau ein Element (Prinzip ”ohne Zurücklegen der Elemente”). Mit dem fundamentalen Abzählprinzip (2.1) ist dann die Lösung für alle drei Probleme über

$$N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \tag{2.4}$$

gegeben. So gibt es beispielsweise für die Kartenreihe

$$N = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760$$

Möglichkeiten.

Die Formel (2.4) gibt ganz allgemein die Lösung für das Problem ”Permutation von n Elementen zur Ordnung k” an. Damit sind die möglichen Anordnungen *ohne Wiederholung* der Elemente auf den k Plätzen gemeint. Die Formel lässt sich mit Hilfe der Fakultät handlicher schreiben. Es ist

$$\begin{aligned} P(n,k) &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1} \end{aligned}$$

und hierin erhält man durch Kürzen sofort

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Man kann weiterhin den Fall betrachten, dass die n Elemente für jeden der k Plätze zur Ablage zur Verfügung stehen, die Auswahl eines Elementes für einen Platz die Menge der Elemente also nicht reduziert. Damit können wir also die möglichen Anordnungen *mit Wiederholung* der Elemente auf den k Plätzen betrachten. Gemäss des fundamentalen Abzählprinzips (2.1) gibt es dann

$$N = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\text{-mal}} = n^k \tag{2.5}$$

mögliche Anordnungen.
Wir halten dieses Ergebnis definitorisch mit Bezug auf das Urnenmodell fest:

Definition 2.3 (Permutation) *Entnimmt man einer Urne mit n wohlverschiedenen Elementen nacheinander k Elemente, so lassen sich die entnommenen k Elemente auf*

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{2.6}$$

verschiedene Weise anordnen. Legt man jedes Element nach Entnahme wieder in die Urne zurück und zieht k mal, so existieren

$$N = n^k \tag{2.7}$$

verschiedene Anordnungen.

Bemerkung: Jede Permutation zur Ordnung k ist also eine Folge der Länge k, die durch eine bestimmte Auswahl aus den n Elementen auf den k Plätzen gebildet ist.[1]

Als Beispiele für Anordnungen mit Wiederholung der Elemente können wir betrachten:

Problem 2.4 *Wie viele 4-stellige Zahlen kann man mit den Ziffern 0-9 bilden, wenn jede Ziffer auf jeder Stelle vorkommen darf?*

[1] In der Literatur findet man für die beiden hier besprochenen Fälle auch den Ausdruck "Variation". Nur der Fall ohne Wiederholung wird im strengen Sinne als Permutation verstanden. Wir verwenden nur für den Fall der Anordnung ohne Wiederholung das Symbol $P(n,k)$, verwenden aber für beide Fälle den Begriff "Permutation"(Näheres s. Bronstein-Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Frankfurt 1989, S. 107ff).

Problem 2.5 *Wie viele verschiedene Kartenfolgen gibt es, wenn man beim 3-maligen Ziehen aus 32 Karten nach jedem Zug die gezogene Karte wieder in den Stapel gelegt und neu gemischt wird?*

Aus der obigen Definition ergibt sich, dass hierfür n^k verschiedene Folgen existieren. Im Ziffernbeispiel sind es die Folgen (0000) bis (9999), also $10^4 = 10000$ Anordnungen, im Kartenbeispiel sind es $32^3 = 32768$.

Wir wollen im Folgenden noch einige Spezialfälle betrachten. Für den Fall $n = k$ ohne Wiederholung (es existieren genausoviel Elemente wie Plätze) folgt mit (2.6) direkt

$$P(n, k) = n! \tag{2.8}$$

Ein weiterer Spezialfall liegt vor, wenn nicht alle der n Elemente wohlverschieden sind.

2.1.1 Permutation mit nicht allen Elementen wohlverschieden

Wie viele verschiedene Anordnungen der Länge k kann man mit n Elementen bilden, wenn nicht alle n Elemente wohlverschieden sind? Wenn nicht alle n Elemente verschieden sind, kann man die jeweils gleichen zu Gruppen zusammenfassen, so dass m Gruppen mit den verschiedenen Elementen existieren, wobei $m \leq n$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n. \tag{2.9}$$

Wir betrachten zunächst das folgende Beispiel.

Beispiel 2.1 Wir suchen alle möglichen verschiedenen Anordnungen, die man aus den drei Ziffern $\{1, 1, 3\}$ bilden kann. Wir denken uns zunächst die beiden gleichen Ziffern markiert (mit a und b) und schreiben die möglichen $3! = 6$ Anordnungen auf:

Nr	Folge		
1	1a	1b	3
2	1a	3	1b
3	1b	1a	3
4	1b	3	1a
5	3	1a	1b
6	3	1b	1a

Da ja die beiden Einsen nicht unterscheidbar sind, sind jeweils die Folgen 1 und 3, 2 und 4 sowie 5 und 6 gleich. Wir haben 6 mögliche Folgen, und aus den gleichen Elementen kann man $2! = 2$ Folgen bilden. Offenbar ist

$$\text{Verschiedene Folgen} = \frac{\text{Alle Folgen}}{\text{Gleiche Folgen}}$$

und wir erhalten so 3 unterscheidbare Folgen.

Die gleichen Folgen ergeben sich aus allen Anordnungen, die man mit den gleichen Elementen bilden kann. Hat man also eine Gruppe mit $n_1 = 3$ gleichen Elementen und eine Gruppe mit $n_2 = 4$ gleichen Elementen, so kann man beiden Gruppen $n_1! \cdot n_2!$ gleiche Folgen der Länge $n_1 + n_2$ bilden. Allgemein gilt für die Anzahl der unterscheidbaren Folgen

$$N = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} n_i!} \tag{2.10}$$

wobei (2.9) für die Gruppen gleicher Elemente gilt.

Beispiel 2.2 Wie viele verschiedene Möglichkeiten bestehen, die Buchstaben des Wortes "Statistik" anzuordnen? Offenbar haben wir für die Grössen der Untergruppen $n_1(S) = 2, n_2(T) = 3, n_3(A) = 1, n_4(I) = 2, n_5(k) = 1$. Mit (2.10) hat man dann

$$N = \frac{9!}{2!3!1!2!1!} = \frac{9!}{3!2!2!} = 15120$$

Möglichkeiten.

2.1.2 Problembeispiele

Wir betrachten im folgenden einige beispielhafte Problemstellungen.

Problem 2.6 (Blöcke) *Man habe eine Delegation aus 3 Amerikanern, 4 Russen und 2 Franzosen. Auf wie viele Weisen können sie auf einer Stuhlreihe Platz nehmen, wenn die Delegierten einer Nation zusammen sitzen müssen?*

Für eine feste Reihenfolge der 3 Blöcken können durch Permutation der Delegierten innerhalb der Blöcke

$$3!4!2!$$

Reihenfolgen gebildet werden. Nun kann man aber auch noch die Blöcke auf 3! verschiedene Weise anordnen, also bestehen insgesamt

$$3!4!2!3! = 1728$$

Möglichkeiten.

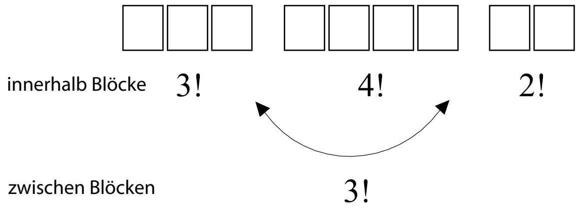

Abbildung 2.1: Veranschaulichung der Blockpermutationen aus Beispielproblem (**??**).

Problem 2.7 (Ringpermutation) *Wie viele Sitzreihenfolgen gibt es für 8 Personen an einem runden Tisch?*

Offensichtlich kann sich die erste Person auf jeden der 8 Plätze setzen, ohne dass sich die Nachbarschaften einer bestimmten Reihung ändern. Hat sie das getan, so verbleiben gemäss des fundamentalen Abzählprinzips 7! Reihenfolgen. Allgemein gibt es in der Ringpermutation $(n-1)!$ verschiedene Anordnungen der n Elemente.

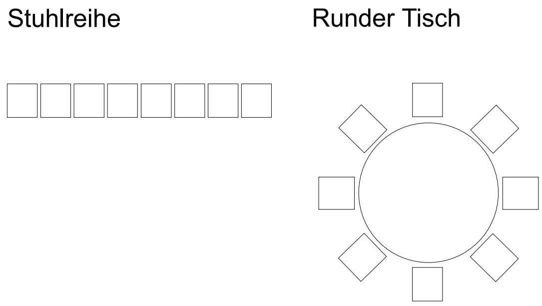

Abbildung 2.2: Sitzreihenfolgen am runden Tisch und in der Stuhlreihe. Die Reihenfolgen am runden Tisch sind unabhängig von der absoluten Position des Platzes. Auf welchen Stuhl sich die erste Person setzt, ist für die Reihenfolge (wer neben wem sitzt) egal. Die erste Person kann sich also auf jeden der 8 Stühle setzen, auf jeder dieser 8 Positionen können dieselben Sitznachbarschaften realisiert werden. In der Stuhlreihe ist das nicht so und es entstehen verschiedene Reihen durch Wahl eines bestimmten Platzes der ersten Person.

Problem 2.8 (Nebeneinander Sitzen) *Kurt möchte gerne neben Lisa sitzen. Wie gross ist hierfür die Wahrscheinlichkeit bei rein zufälliger Sitzordnung a) in der Stuhlreihe und b) am runden Tisch?*

Wir machen uns das in a) vorliegende Problem folgendermaßen klar (s. Abb. (2.3)). Es gibt 7 mögliche Blockpositionen, für jede Blockposition gibt es $2!6!$ Reihenfolgen, nämlich die Permutationen innerhalb des 2er Blocks und die $6!$ Reihenfolgen der verbleibenden 6 Personen. Zusammen haben wir also

$$7 \cdot 2!6! = 10080$$

Reihenfolgen. Offenbar gibt es also

$$N = (n - k + 1) \cdot k!(n - k)!$$

Möglichkeiten für Elementreihenfolgen bei einem Block der Mächtigkeit k in einer Reihe mit n Elementen.

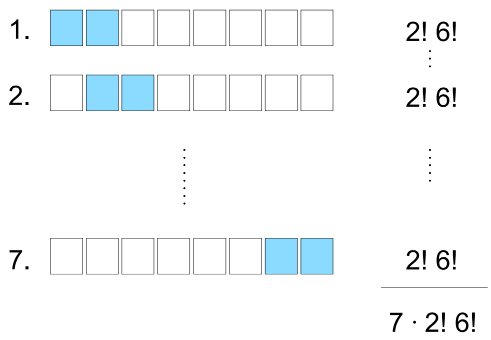

Abbildung 2.3: Die verschiedenen Positionen eines 2er Blocks in einer 8er Reihe. Rechts stehen die möglichen Reihenfolgen für jede Blockposition.

Wie stellt sich das Problem am runden Tisch dar? Wir können uns hier wieder überlegen, dass die absolute Position des 2er Blocks am runden Tisch egal ist. Egal, wo man den Block platziert, die anderen 6 Elemente kann man auf $6!$ Weisen anordnen. Da man die beiden Elemente im Block auf $2!$ Weisen anordnen kann, hat man insgesamt $2!6!$ Möglichkeiten für Reihenfolgen, allgemein also

$$N = k!(n - k)!$$

Reihenfolgen, da die $(n - k + 1)$ möglichen Blockpositionen in der Reihe mit n Elementen am runden Tisch gleichwertig sind.

Damit haben wir die Anzahl der günstigen Falle für a) und b) ermittelt. Um zu den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten zu gelangen, müssen wir noch die möglichen Fälle betrachten. Für die Stuhlreihe sind 8! Sitzanordnungen möglich, somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kurt neben Lisa sitzt

$$P = 7 \cdot \frac{2!6!}{8!} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 8} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Am runden Tisch gibt es ja $(n-1)! = 7!$ mögliche Fälle, damit haben wir

$$P = \frac{2!6!}{7!} = \frac{2}{7} = 0.286$$

für die Wahrscheinlichkeit, dass Kurt neben Lisa am runden Tisch sitzt.

Ein klassisches Problem, welches durch Überlegungen zur Permutation gelöst wird, ist das sog. "Geburtstagsproblem". Es lautet:

Problem 2.9 (Geburtstagsproblem) *Wieviele Leute muss man auf eine Party einladen, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Leute denselben Geburtstag haben, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass alle verschiedene Geburtstage haben?*

Man kann dazu folgende Überlegung anstellen. Zunächst nehme man an, dass alle 365 Tage im Jahr als Geburtstage gleich wahrscheinlich sind (was natürlich eine Idealisierung ist und empirisch nicht exakt stimmt). Wir betrachten zunächst die möglichen Fälle. Wir haben $n = 365$ Tage und k Personen. Theoretisch kann die erste Person an allen 365 Tagen Geburtstag haben, so auch die zweite, die dritte, usw. also existieren

$$\underbrace{365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365}_{k\text{-mal}} = 365^k$$

mögliche Geburtstage. Zu den günstigen Fällen: Offenbar sind die Ereignisse $A =$ "mindestens 2 gleiche Geburtstage" und $B =$ "alles verschiedene Geburtstage" komplementär, d.h. es gilt $B = \overline{A}$ und damit gilt

$$P(\text{mindestens 2 gleiche Geburtstage}) = 1 - P(\text{alles verschiedene Geburtstage}).$$

Zweckmässigerweise bestimmt man die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\overline{A}$. Wenn alle Geburtstage verschieden sind, gibt es dafür

$$365 \cdot (365-1) \cdot (365-2 \cdot \ldots \cdot (365-k+1)) = \frac{365!}{(365-k)!}$$

Möglichkeiten. Wir haben hier also offenbar eine Anwendung der Permutation mit Wiederholung (mögliche Fälle) und ohne Wiederholung (günstige Fälle) vorliegen. Die Wahrscheinlichkeit für A ist dann

$$P(A) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-k)!}}{365^k} = 1 - \frac{365!}{365^k(365-k)!}.$$

Da A und $B = \overline{A}$ komplementär sind, haben wir für unser Problem

$$P(A) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$$

und wir müssen folglich k derart bestimmten, dass $P(A) = 0.5$ ist. Die numerische Lösung hierfür lautet $k = 22.77$, d.h. wenn man 23 Leute einlädt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Leute denselben Geburtstag haben bereits grösser als die Wahrscheinlichkeit, dass alle Leute an verschiedenen Tagen Geburtstag haben.

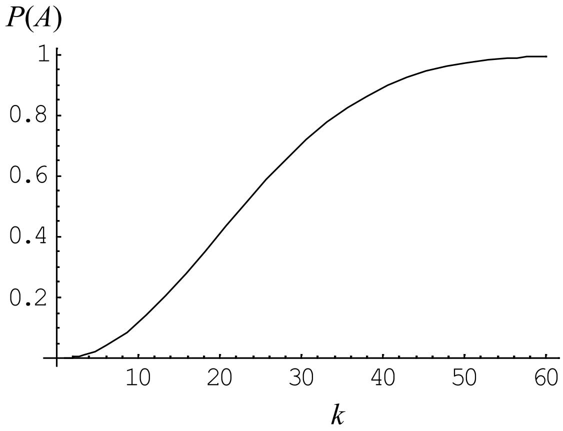

Abbildung 2.4: Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Personen denselben Geburtstag haben, in Abhängigkeit von der Gruppengrösse, k.

2.2 Kombinationen (Ungeordnete Auswahlen von Elementen)

2.2.1 Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient ist folgendermassen erklärt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2.11}$$

Beispiel:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Für den Binomialkoeffizienten gilt die folgende Symmetriebeziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{(n-k)} \tag{2.12}$$

denn

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Also z.B.

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

und genauso

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

2.2.2 Auswahl ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Wir betrachten die Menge von Elementen

$$\{a, b, c, d\}.$$

Man kann aus ihren 4 Elementen 4! Reihenfolgen bilden, aber die Menge stellt nur eine Auswahl (Kombination) mit der 4 Elementen dar. Wie viele verschiedene 3er Auswahlen kann man aus den 4 Elementen treffen? Es sind dies die Auswahlen

$$\{(a, b, c), (a, b, d), (a, c, d), (b, c, d)\},$$

also genau 4. Mit den 4 Elementen kann man $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Permutationen zur Ordnung $k = 3$ bilden. Die Permutationen sind aber nichts anderes als die möglichen 3er Auswahlen, jede angeordnet auf alle möglichen $k! = 3! = 6$ Weisen. Teilt man also die Anzahl der Permutationen $P(n, k)$ durch die Anzahl der Permutationen der Plätze ($k!$), so erhält man die Anzahl der verschiedenen Kombinationen $C(n, k)$ der n Elemente zur Ordnung k. Es gilt also

$$P(n, k) = C(n, k) \cdot \text{Permutationen der } k \text{ Plätze}$$

d.h.

$$P(n, k) = C(n, k) \cdot k! \tag{2.13}$$

bzw.

$$C(n, k) = \frac{P(n, k)}{k!} \tag{2.14}$$

Da $P(n, k)$ über (2.6) gegeben ist, folgt wegen (2.14)

$$C(n, k) = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{2.15}$$

der Binomialkoeffizient als Formel für die Anzahl der möglichen Kombinationen ohne Wiederholung.

Wir können ebenso den Fall betrachten, dass nach Auswahl eines Elementes dieses Element wieder zurückgelegt wird und damit für weitere Auswahlen zur Verfügung steht (Ziehen mit

Zurücklegen). Wie viele mögliche Kombinationen von n Elementen zur Ordnung k kann man dann erhalten? Man kann zeigen (s. Problembeispiel (2.12)), dass dann genau

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Möglichkeiten für verschiedene Auswahlen existieren. Wir halten dieses Ergebnis ebenfalls in einer Definition fest:

Definition 2.4 (Kombination) *Entnimmt man einer Urne mit n wohlverschiedenen Elementen nacheinander k Elemente, so können dabei*

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.16}$$

verschiedene Zusammenstellungen von k Elementen (Kombinationen) auftreten. Legt man jedes Element nach Entnahme wieder in die Urne zurück und zieht k mal, so existieren

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \tag{2.17}$$

verschiedene Kombinationen.

Wir schauen auf einige Problembeispiele.

Problem 2.10 (Bestimmte Karten Ziehen) *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, Pik-Ass (PA), Pik-König (PK) und Pik-Dame (PD) aus einem Kartenspiel mit 32 Karten zu ziehen, wenn man dreimal hintereinander ohne Zurücklegen ziehen darf?*

Man kann hier mit 2 Überlegungen zur Lösung gelangen. Berücksichtigen wir die Reihenfolge, so sind die $3! = 6$ Folgen

$$\begin{array}{ccc} PA & PK & PD \\ PA & PD & PK \\ PK & PA & PD \\ PK & PD & PA \\ PD & PA & PK \\ PD & PK & PA \end{array}$$

günstig. Möglich sind $32 \cdot 31 \cdot 30$ Folgen, also ist

$$P = \frac{6}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{6}{29760} = 0.0002016$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Alternativ können wir uns überlegen, dass es bei diesem Problem auf die Reihenfolge nicht ankommt. Es gibt

$$\binom{32}{3}$$

mögliche Kartenkombinationen zur Ordnung 3 aus den 32 Karten. Nur eine Kombination von ihnen ist günstig. Also ist

$$P = \frac{1}{\binom{32}{3}} = \frac{3!(32-3)!}{32!} = \frac{3!29!}{32!} = \frac{6}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{6}{29760} = 0.0002016$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Problem 2.11 (Zahlenlotto) *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei sechsmaligem Ziehen 6 richtige aus 49 Zahlen zu erhalten?*

Auch bei diesem Problem kommt es nicht auf die Reihenfolge an, man muss nur alle 6 ”vorbestimmten” Zahlen erhalten, in welcher Folge, ist egal. Es gibt

$$C(49,6) = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$$

möglicher 6er Kombinationen, eine ist günstig. Also ist

$$P = \frac{1}{13983816}$$

die Wahrscheinlichkeit für 6 richtige.

Problem 2.12 (Paare mit Wiederholung) *Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den $n = 5$ Vokalen $\{a, e, i, o, u\}$ Paare zu bilden ($k = 2$), wobei Paare von gleichen Vokalen vorkommen dürfen?*

Es sind dies ja offenbar die Paare

$$\begin{array}{c} aa \quad ee \quad ii \quad oo \quad uu \\ ae \quad ai \quad ao \quad au \\ ei \quad eo \quad eu \\ io \quad iu \\ ou \end{array}$$

und dies sind 15. Da wir hier auswählen und es eine Wiederholung der Elemente geben darf, handelt es sich um Kombination mit Wiederholung, und wir finden die gesuchte Anzahl der Möglichkeiten durch Anwendung von (2.17):

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(5+2-1)!}{2!4!} = \frac{6!}{2!4!} = 15.$$

Problem 2.13 (Menge aller Teilmengen) *Wie viele Elemente enthält die Menge aller Teilmengen einer 5 elementigen Grundmenge?*

Dies ist ein "klassisches" kombinatorisches Problem. Wir wissen aus der Konstruktion der Ereignisalgebra, dass die Menge aller Teilmengen (Klasse) einer Menge Ω die Menge Ω selbst, die leere Menge $\emptyset$ und alle Kombinationen, die man mit den Elementen der Menge Ω bilden kann, enthält. Es liegt also ein Auswahlproblem vor: Wir dürfen Mengen des Umfangs 0, 1, 2, 3, 4 und 5 Elemente wählen; die Möglichkeiten, mit denen das geht, summieren wir. Also ist

$$N = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

die gesuchte Anzahl. Es gibt eine verblüffend einfache Lösung für den Umfang der Menge aller Teilmengen, die wir sehen, wenn wir uns der binomischen Reihe (**??**) zuwenden. Zunächst machen wir uns diese Lösung über eine inhaltliche Überlegung klar.

Wir fragen nach den verschiedenen Weisen, mit der man 0,1,2 und 3 Leute aus einer Gruppe von 3 Leuten auswählen kann.[2] Wir veranschaulichen uns das Problem mit einer kleinen Zeichnung (s. Abb. 2.5): Für jede Person, A, B und C bestimmt man, ob sie ausgewählt wird oder

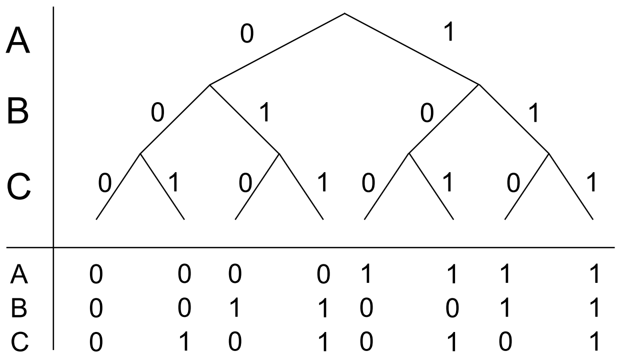

Abbildung 2.5: Das Problem der Anzahl der Teilmengen einer Menge, dargestellt als binäres Auswahlproblem. Man permutiert für die 3 Personen A, B und C die möglichen Auswahlen (1) und Nichtauswahlen(0). Die Anzahl aller Binärfolgen ist der gesuchte Umfang der Menge aller Teilmengen einer Menge mit 3 Elementen.

nicht. Man erhält so 2^3 mögliche Binärfolgen. Diese Binärfolgen lassen sich aber vollständig partitionieren in die Fälle, dass 0 Elemente, 1 Element, 2 Elemente oder alle 3 Elemente ausgewählt wurden (s. Tab. 2.1). Die Summe aller Auswahlhäufigkeiten ist dann die Anzahl aller

[2] Dies ist ja offenbar genau das Problem der Bestimmung des Umfangs der Menge aller Teilmengen.

$h(k)$	$\binom{3}{0}=1$	$\binom{3}{1}=3$	$\binom{3}{2}=3$	$\binom{3}{3}=1$
k	0	1	2	3

Tabelle 2.1: Die Häufigkeiten der Kombinationen für k Auswahlen.

Folgen, also 2^3, dies ist daher auch der Umfang der Menge aller Teilmengen, die man mit einer Menge von 3 Elementen erhält.[3] Offenbar gilt allgemein der Spezialfall der binomischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n. \tag{2.18}$$

2.3 Übersicht über kombinatorische Formeln

Wir haben in den bisherigen Problembehandlungen gesehen, dass es im wesentlichen darauf ankommt, zu identifizieren, wie ”Elemente” (n) und ”Plätze” (k) in einer Problemstellung zuzuweisen sind, und dann zu entscheiden, ob es auf die Reihenfolge ankommt oder nicht und ob Elemente wiederholt auftreten können oder nicht (mit oder ohne Zurücklegen). Entsprechend kann man die kombinatorischen Formeln in ein 4- Felder Schema eintragen (s. Tab. 2.2)

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung	
Reihenfolge wichtig	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	nicht alle verschieden: $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$
Reihenfolge egal	$\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$	

Tabelle 2.2: Übersicht über die wichtigsten kombinatorischen Formeln.

2.4 Spezielle Auswahlprobleme

In manchen, durchaus typischen Problemsituationen ist es nötig, die bereits kennengelernten kombinatorischen Formeln zu kombinieren und flexibel der Problemsituation anzupassen. Zu derart typischen Problemstellungen gehören die Besetzung von Ausschüssen und die Bildung von Partitionen. Diesen Problemen wenden wir uns jetzt zu.

[3] Für diese Lösung muss man das Problem also ein wenig umstrukturieren. Die Personen sind die k ”Plätze” auf denen man die 2 ”Elemente” (die Auswahl-Tags ”0” und ”1”) anordnet.

2.4.1 Kombination mit Restriktion

Problem 2.14 (Ausschuss Bilden) *Man muss einen Ausschuss bilden, in dem 4 Professoren, 2 Mittelbauer und 2 Studenten sitzen. Man habe 8 Professoren, 8 Mittelbauer und 4 Studenten als Kandidaten zur Auswahl. Auf wie viele unterschiedliche Weisen kann der Ausschuss gebildet werden?*

Die 4 Professoren kann man auf $\binom{8}{4}$ Weisen auswählen, 2 Mittelbauer auf $\binom{8}{2}$ Weisen und die 2 Studenten auf $\binom{4}{2}$ Weisen. Nach dem fundamentalen Abzählprinzip (2.1) gibt es somit

$$N = \binom{8}{4}\binom{8}{2}\binom{4}{2} = 11760$$

Möglichkeiten zur Besetzung des Ausschusses mit der vorgegebenen Zusammensetzung.

Problem 2.15 (Ausschuss Bilden mit Restriktionen (a)) *Es soll ein Ausschuss von 5 Personen gebildet werden, 10 Personen stehen zur Auswahl. Aber 3 Personen sind zerstritten und dürfen nicht alle zusammen in den Ausschuss.*

Wir machen uns die Situation folgendermassen klar. Wir wollen n Elemente aus N Elementen auswählen. Dafür gibt es

$$\binom{N}{n}$$

Möglichkeiten. Nun dürfen m Elemente ($m \leq n$) nicht zusammen auftreten, man will aber Kombinationen zur Ordnung n bilden. Wir denken uns alle möglichen Kombinationen zur Ordnung partitioniert in die Kombinationen, die alle m Elemente enthalten und diejenigen, die nicht alle m enthalten. Entsprechend gilt

$$\text{Kombinationen ohne alle } m = \text{Alle Kombinationen} - \text{Kombinationen mit allen } m$$

Nun gibt es $\binom{m}{m} = 1$ Möglichkeit, m Elemente aus den m Elementen zu wählen. Dann können die verbleibenden $n - m$ Elemente auf $\binom{N-m}{n-m}$ Weisen aus der nun um m reduzierten Elementanzahl $N - m$ gewählt werden. Also gibt es

$$\binom{m}{m}\binom{N-m}{n-m} = \binom{N-m}{n-m}$$

Möglichkeiten für Kombinationen zur Ordnung n, die die m Elemente enthalten. Und es ist

$$\text{Kombinationen ohne alle } m = \binom{N}{n} - \binom{N-m}{n-m} \tag{2.19}$$

die gesuchte Anzahl der Kombinationen ohne die auszuschliessenden m Elemente.

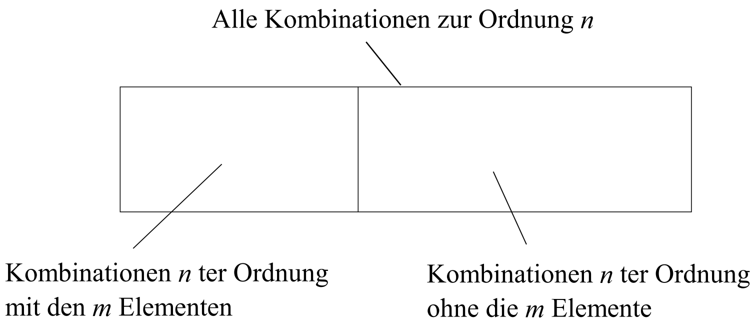

Abbildung 2.6: Die Partitionierung aller möglichen Kombinationen zur Ordnung n in diejenigen, die alle m kritischen Elemente enthalten und die, die nicht alle m enthalten.

Für die Beispielaufgabe haben wir $N = 10, n = 5, m = 3$ und damit

$$\binom{10}{5} - \binom{7}{2} = 252 - 21 = 231$$

Möglichkeiten, den Ausschuss so zu bilden, dass nicht alle 3 Streithähne darin vorkommen. Wir modifizieren nun die Problemstellung:

Problem 2.16 (Ausschuss Bilden mit Restriktionen (b)) *Es soll ein Ausschuss von 5 Personen gebildet werden, 10 Personen stehen zur Auswahl. 3 Personen wollen, wenn überhaupt, nur zusammen in den Ausschuss.*

Offenbar tritt der gewünschte Fall ein, wenn

a) keins der m Elemente gewählt wird;

b) alle m Elemente aufgenommen werden.

Die Anzahl der Kombinationen für den Fall b), dass alle m Elemente ausgewählt werden, haben wir oben schon zu

$$\binom{N-m}{n-m}$$

bestimmt. Die Möglichkeiten, 0 Elemente aus der Gruppe der m Elemente zu wählen ist $\binom{m}{0} = 1$ mal die Möglichkeiten, $n - 0 = n$ Elemente aus dem Pool ohne die m zu ziehen, also gilt

$$\text{Kombinationen ohne irgendeins der } m = \binom{m}{0}\binom{N-m}{n-0}.$$

Also gilt für die gesuchte Anzahl, dass

$$N_A = \binom{N-m}{n-m} + \binom{N-m}{n-0}$$

Möglichkeiten bestehen, den Ausschuss so zu bilden, dass entweder alle m drin sind oder gar keiner. Also haben wir für unser Problem

$$
\begin{aligned}
N_{\text{Alle 3 drin}} &= \binom{10-3}{5-3} = \binom{7}{2} = 21 \\
N_{\text{Keiner drin}} &= \binom{10-3}{5} = \binom{7}{5} = 21
\end{aligned}
$$

Somit gibt es $21 + 21 = 42$ Möglichkeiten.

2.4.2 Geordnete und ungeordnete Partitionen

Unter Partitionen verstehen wir vollständige Aufteilungen einer Ausgangsmenge mit n Elementen in disjunkte Teilmengen verschiedenen Umfangs n_i. Wegen der vollständigen Aufteilung muss die Summe aller Umfänge den Umfang der Ausgangsmenge ergeben, es gilt also $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, m die Anzahl der Partitionen.

Problem 2.17 *Auf wie viele Weisen kann man 9 Geschenke an 3 Kinder verteilen, wenn jedes Kind 3 Geschenke bekommen soll?*

Wir haben also die Aufgabe, Mengen von 3er Partitionen zu konstruieren, wobei aber die Position einer bestimmten Partition nicht egal ist, da sie die Zuordnung zu einem einem Kind festlegt. In der Menge der Partitionen

$$\{A_1, A_2, A_3\}$$

ist die Position einer Menge A_i die Nr. des Kindes, also sind

$$(1, 4, 6), (2, 3, 5), (7, 8, 9)$$

und

$$(7, 8, 9), (2, 3, 5), (1, 4, 6)$$

verschiedene Geschenkaufteilungen, da ja im ersten Fall Kind 1 die Geschenke $(1, 4, 2)$ erhält, im zweiten Fall aber die Geschenke $(7, 8, 9)$. Es handelt sich um Folgen von Kombinationen oder *geordnete Partitionen*. Die Anzahl der möglichen Weisen, geordnete Partitionen zu erzeugen erhalten wir wieder mit dem fundamentalen Abzählprinzip (2.1). Für das erste Kind existieren $\binom{9}{3}$ mögliche 3er Geschenkbündel, für das zweite Kind verbleiben dann $\binom{6}{3}$ 3er Bündel, das dritte Kind bekommt die dann verbleibende Auswahl von $\binom{3}{3}$. Insgesamt gibt es also

$$\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9!}{3!3!3!} = 1680$$

Folgen von 3er Kombinationen, die die Menge mit 9 Elementen partitionieren. Allgemein gibt es

$$N_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!} \tag{2.20}$$

geordnete m Partitionen. Wir bemerken, dass dies dieselbe Formel (2.10) ist, die wir zur Lösung des Problems ”Permutation mit nicht allen Elementen wohlverschieden” verwendet haben.

Problem 2.18 *Wie viele verschiedene Aufteilungen in 3er Bündel kann man vornehmen?*

Man beachte, dass diese Frage nicht bedeutet, wie viele 3er Bündel man packen kann (das sind ja $\binom{9}{3}$), sondern gefragt ist nach der Anzahl der unterschiedlichen Partitionen der Ausgangsmenge mit 9 Elementen zu 3er Untermengen. Nun sind in den geordneten Partitionen ja alle 3! Permutationen enthalten, die man mit den 3er Mengen auf den 3 Plätzen vornehmen kann. Ist also $\{A_1, A_2, A_3\}$ eine bestimmte Partition, so sind alle seine Permutationen

$$\begin{gathered} \{A_1, A_2, A_3\} \\ \{A_1, A_3, A_2\} \\ \{A_2, A_1, A_3\} \\ \{A_2, A_3, A_1\} \\ \{A_3, A_2, A_1\} \\ \{A_3, A_1, A_2\} \end{gathered}$$

in den geordneten Partitionen enthalten. Wir gelangen also zu der Anzahl der verschiedenen Partitionen, wenn wir die Anzahl der geordneten Partitionen durch die Anzahl der Permutationen der Partitionsmengen gleichen Umfangs teilt. In unserem Fall existieren

$$\frac{1680}{3!} = 280$$

verschiedene Partitionen zur Ordnung 3. Man beachte, dass nur die Partitionsmengen *gleichen Umfangs* verschiedene Reihenfolgen bilden. Dies sehen wir im nächsten Beispiel.

Problem 2.19 *Man habe 8 Geschenke. Das erste Kind soll 4 bekommen, die übrigen jeweils 2. Auf wie viele verschiedene Weisen ist das möglich?*

In der geordneten Menge der Partitionen haben wir also auf der ersten Stelle ein 4er Tupel, auf der zweiten ein 2er und auf der dritten ebenfalls ein 2er Tupel. Wir erhalten

$$\binom{8}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{2} == \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{8!}{4!2!2!} = 420$$

geordnete Partitionen. In diesen sind z.B.

$$\{(4,5,7,8),(1,2),(3,6)\}$$

und

$$\{(4,5,7,8),(3,6),(1,2)\}$$

als unterschiedliche geordnete Partitionen enthalten. Wir sehen, dass es nur bei Partitionsmengen gleichen Umfangs zu verschiedenen Reihenfolgen derselben Kombinationen kommen kann, da die erste Stelle als 4er Kombination feststeht (das erste Kind). Fragen wir also nach den Möglichkeiten, unterschiedliche Geschenkaufteilungen zu machen (Weisen, ein 4er Geschenkbündel und zwei 2er Bündel zu schnüren), so müssen wir durch die 2! Reihenfolgen der beiden 2er Kombinationen teilen. Also erhalten wir

$$\frac{420}{2!} = 210$$

Weisen.

2.5 Kombinatorische Wahrscheinlichkeiten

Bei Laplace Wahrscheinlichkeiten ist man auf sichere Methoden der Ermittlung der günstigen und der möglichen Fälle angewiesen. Entsprechende Methoden werden von der Kombinatorik bereitgestellt. Sie erweisen sich aber auch ganz allgemein bei der Behandlung von Teilproblemen der Wahrscheinlichkeitslehre, so z.B bei Folgen unabhängiger Versuche und Zufallsvariablen, als essentiell. Im folgenden werden wir die Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten unter Verwendung kombinatorischer Methoden genauer betrachten und gleichzeitig die Verknüpfung der Anwendung kombinatorischer Methoden und der Kolmogoroffschen Axiomatik einüben.

2.5.1 Hypergeometrisches Problem und hypergeometrische Formel

Problem 2.20 (Karten Ziehen) *Aus einem Kartenspiel mit 36 Spielkarten darf man 3 mal ziehen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Ass dabei ist?*

Wir betrachten zunächst die möglichen Fälle. Dies sind genau die

$$\binom{36}{3}$$

Weisen (Kombinationen), mit denen 3 Karten aus 36 Karten entnommen werden können. Zu den günstigen Fällen überlegt man sich, dass man ein Ass aus den existierenden 4 Assen auf

$$\binom{4}{1}$$

Weisen entnehmen kann, eben eins der vier. Hat man ein Ass gezogen, gibt nun natürlich noch Möglichkeiten, die übrigen 2 Karten (keine Asse!) zu ziehen. Diese sind

$$\binom{36-4}{3-1} = \binom{32}{2}$$

so dass es insgesamt

$$\binom{4}{1}\binom{32}{2}$$

Weisen gibt, 3 Karten zu ziehen, unter denen genau ein Ass ist. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{\binom{4}{1}\binom{32}{2}}{\binom{36}{3}} = \frac{1984}{7140} = 0.28.$$

Problem 2.21 *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei Entnahme von 3 aus 36 Spielkarten mindestens ein Ass dabei?*

Der Fall tritt ein, wenn wir ein Ass, zwei Asse oder drei Asse ziehen. Die Ereignisse sind disjunkt, da wir entweder eins *oder* zwei *oder* drei erhalten können (aber diese Ereignisse nicht gleichzeitig auftreten können). Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach dem 3. Axiom von Kolmogoroff (allgemeiner Additionssatz, 1.3) gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcccccl} P(1\text{Ass}) & = & \frac{\binom{4}{1}\binom{32}{2}}{\binom{36}{3}} & = & \frac{1984}{7140} & = & 0.278 \\[2ex] P(2\text{Ass}) & = & \frac{\binom{4}{2}\binom{32}{1}}{\binom{36}{3}} & = & \frac{192}{7140} & = & 0.027 \\[2ex] P(3\text{Ass}) & = & \frac{\binom{4}{3}\binom{32}{0}}{\binom{36}{3}} & = & \frac{4}{7140} & = & 0.0005 \\[2ex] \hline P(\text{mind. 1 Ass}): & & & & \Sigma & = & 0.305 \end{array}$$

Wir können das Problem auch über die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses lösen, Es gilt ja

$$P(\text{mind. 1 Ass}) = 1 - P(\text{kein Ass})$$

und wir erhalten

$$P(\text{mind. 1 Ass}) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{32}{3}}{\binom{36}{3}} = 1 - \frac{4960}{7140} = 1 - 0.695 = 0.305.$$

Wir betrachten ein weiteres Beispiel.

Problem 2.22 (Kartenstösse) *Ein aus 36 Karten bestehendes Spiel wird zufällig in 2 Stösse gleicher Grösse eingeteilt. Wie wahrscheinlich ist es, dass sich in beiden Stössen dieselbe Anzahl roter wie schwarzer Karten befindet.*

Wir können das Problem offenbar auch so formulieren, dass man 18 Karten zieht und sich darin genau 9 rote und 9 schwarze befinden sollen. Damit passt es auf unser Lösungsschema, denn man hat ja

$$\binom{36}{18}$$

Möglichkeiten, 18 Karten aus 36 zu ziehen. Es gibt weiterhin

$$\binom{18}{9}$$

Möglichkeiten, 9 rote aus 18 roten zu ziehen. Dann bleiben

$$\binom{36-18}{18-9} = \binom{18}{9}$$

Möglichkeiten, 9 schwarze zu ziehen. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{\binom{18}{9}\binom{18}{9}}{\binom{36}{18}} = 0.26.$$

Die bisher behandelten Probleme gehorchen einem allgemeinen Schema.

Definition 2.5 (Hypergeometrisches Problem) *In einer Urne befinden sich N Kugeln, M weisse und N-M schwarze. Man entnimmt n Kugeln (ohne Zurücklegen) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den n Kugeln genau m weisse sind? (*$m \leq n, m \leq M, n-m \leq N-M$*).*

Die Lösung dieses Problems ist über die Hypergeometrische Formel gegeben:

Definition 2.6 (Hypergeometrische Formel) *Es gibt*

$$\binom{N}{n}$$

mögliche Auswahlen zur Ordnung n *Es existieren*

$$\binom{M}{m}$$

Möglichkeiten, m *weisse aus* M *weissen zu wählen und*

$$\binom{N-M}{n-m}$$

Möglichkeiten, bei den verbleibenden $n-m$ Wahlen schwarze aus den $N-M$ schwarzen zu ziehen. Damit gibt es

$$\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}$$

Möglichkeiten, bei n Auswahlen genau m weisse zu erhalten. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist folglich über

$$P = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \tag{2.21}$$

gegeben.

2.5.2 Vermischte Probleme und Anwendungen

Die Anwendung kombinatorischer Prinzipien lässt sich am besten einüben, wenn man sich vermischte Probleme vorlegt, bei denen man entscheiden muss, welcher Fall vorliegt. Wir behandeln im folgenden verschiedene Problemstellungen, bei denen uns die bisher behandelten Prinzipien begegnen.

Problem 2.23 *Was ist wahrscheinlicher beim gleichzeitigen Werfen von 3 Würfeln: 11 oder 12 als Augensumme zu erhalten?*

Betrachten wir die möglichen Kombinationen der Würfelaugen der 3 Würfel, so stellen wir fest, dass es in beiden Fällen gleich viele gibt. Die 11 wird realisiert über $\{$ (1,5,5), (1,4,6), (2,3,6), (2,4,5), (3,3,5), (3,4,4)$\}$ und die 12 über $\{$ (1,5,6), (2,4,6), (2,5,5), (3,4,5), (3,3,6), (4,4,4)$\}$. Heisst das, dass es gleich wahrscheinlich ist, 11 oder 12 als Augensumme zu erhalten? Wir müssen uns vor Augen führen, dass wir diese Frage nur beantworten können, wenn wir für jedes Ereignis günstigen Elementarereignisse abzählen. Mit 3 Würfeln erhält man $6^3 = 216$ Würfelausgänge. Diese können wir ansehen als Permutation mit Wiederholung, da erster, zweiter und dritter Würfel 3 Plätze darstellen, auf jedem kann man 6 Zahlen anordnen. Wie viele dieser Permutationen sind für die betrachteten Ereignisse günstig? Dazu können wir uns überlegen, dass man für jede der für eine bestimmte Augensumme günstigen Kombinationen betrachten kann, über wie viele Permutation sie im Würfelexperiment realisiert wird. Da die Augenzahlen der Würfel auch gleich sein können, haben wir hier den Fall der Permutation mit nicht allen Elementen (die Würfelaugen) wohlverschieden. Wir betrachten die 3 möglichen Fälle (s. Tab. 2.3):
Diese Häufigkeiten (h) tragen wir für jede günstige Kombination ein und summieren alle, um die Anzahl der für eine bestimmte Augensumme günstigen Elementarereignisse zu erhalten. Das ergibt die Wahrscheinlichkeiten

alle Würfel verschieden	$\frac{3!}{1!1!1!}$	=	6
2 gleiche Würfel	$\frac{3!}{2!1!0!}$	=	3
alle Würfel gleich	$\frac{3!}{3!0!0!}$	=	1

Tabelle 2.3: Anzahl der Permutationen für Kombinationen mit einer bestimmten Anzahl gleicher Elemente bei dreimaligem Würfeln.

Augensumme = 11		Augensumme = 12	
h	Kombination	h	Kombination
3	(1,5,5)	6	(1,5,6)
6	(1,4,6)	6	(2,4,6)
6	(2,3,6)	3	(2,5,5)
6	(2,4,5)	6	(3,4,5)
3	(3,3,5)	3	(3,3,6)
3	(3,4,4)	1	(4,4,4)
Σ	27	Σ	25

Tabelle 2.4: Die Anzahl der für die Augensumme 11 (linke Spalten) und 12 (rechte Spalten) günstigen Elementarereignisse, ermittelt über die Anzahl der Permutationen jeder günstigen Würfelaugenkombination.

$$\begin{aligned} P(\text{Augensumme = 12})) &= \frac{25}{216} = 0.116 \\ P(\text{Augensumme = 11})) &= \frac{27}{216} = 0.125 \end{aligned}$$

und damit ist es wahrscheinlicher, 11 als Augensumme zu erhalten.

Problem 2.24 *Frage des Edelmannes de Mere an Pascal: Ist es günstig darauf zu wetten, dass bei 4 Würfen mit einem Würfel mindestens einmal eine sechs fällt? Ist es günstig zu wetten, dass bei 24 Würfen mit 2 Würfeln mindestens einmal eine Doppelsechs (6er Pasch) fällt? Welche Wette ist günstiger?*

Beide Teilprobleme löst man mit dem Komplementärereignis:

$$P(\text{mind. eine Sechs}) = 1 - P(\text{keine Sechs})$$

$$P(\text{mind. eine Doppelsechs}) = 1 - P(\text{keine Doppelsechs})$$

Bei viermaligem Würfeln haben wir 6^4 mögliche Würfelfolgen (Permutationen mit Wiederholung). Wenn keine 6 fällt heisst dies, dass in den hierfür günstigen Folgen auf jedem der 4 ”Plätze” ja nur die Zahlen 1 bis 5 vorkommen dürfen. Also sind alle 5^4 Folgen, die man mit diesen Zahlen bilden kann, günstig. Die Wahrscheinlichkeit ist dann

$$P(\text{mind. eine Sechs}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.518$$

Für das zweite Ereignis kann man sich ähnlich überlegen, dass es ja 35 Elemente (2er Tupel) angeordnet auf 24 Plätzen sind, die das gewünschte Ereignis nicht enthalten von 36^{24} möglichen. Also ist die Wahrscheinlichkeit

$$P(\text{mind. eine Doppelsechs}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.491$$

und dies ist eine etwas kleinere Wahrscheinlichkeit.

Problem 2.25 *In einer Urne sind 3 weisse, 4 rote und 2 schwarze Kugeln. Alle Kugeln sind numeriert und damit unterscheidbar.*

a) *Auf wie viele Weisen kann man die Kugeln anordnen?*

b) *Auf wie viele Weisen kann man die Kugeln anordnen, wenn die Kugeln gleicher Farbe in Blöcken zusammenliegen sollen?*

c) *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Ziehen und Ablegen Versuch die Kugeln gleicher Farbe zusammen liegen?*

Es sind 9 Kugeln, für die Möglichkeit ihrer Anordnung spielt die Farbe keine Rolle. Man hat also $9!$ Möglichkeiten, die Kugeln anzuordnen. Wenn sie in Blöcken gleicher Farbe zusammenliegen sollen, so gibt es ja $3!4!2!$ Möglichkeiten durch Permutation innerhalb der Blöcke mal 3! Möglichkeiten der verschieden Blockanordnung. Die in c) gefragte Wahrscheinlichkeit ist einfach zu ermitteln, da wir unter a) die möglichen Fälle und unter b) die günstigen Fälle für dieses Ereignis bestimmt haben. Also ist

$$P = \frac{3!4!2!3!}{9!}$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Problem 2.26 (Boltzmann-Statistik) *Gegeben seien n Teilchen. Jedes kann sich mit der Wahrscheinlichkeit 1/N in einem von N Kästchen (Ortsquadranten) befinden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich*

a) *in beliebigen n Kästchen je 1 Teilchen*

b) *in n vorher benannten Kästchen je 1 Teilchen befindet?*

Um sich diesem Problem zu nähern, erstellen wir am besten zunächst eine graphische Veranschaulichung. Wir setzen beispielhaft $N = 16$, $n = 4$ und nummerieren die Kästchen durch:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Wir fragen als erstes nach der Anzahl der möglichen Fälle. Dies müssen offenbar alle Möglichkeiten sein, mit denen sich die 4 Teilchen auf die 16 Kästchen verteilen können. Wir können uns vorstellen, dass die 4 Teilchen aus einer Hand auf die Kästchen geworfen werden. Was kann passieren? Wenn z.B. alle Teilchen im ersten Kästchen landen, ist dadurch die Folge der Kästchennummern

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

entstanden. Es könnte aber auch z.B. das erste Teilchen in Kästchen 3, das 2. in Kästchen 10, das dritte in Kästchen 8 und das vierte wieder in Kästchen 3 gelandet sein:

$$3 \quad 10 \quad 8 \quad 3$$

In dieser Schreibweise sind die Teilchen die Plätze, die Kastennummern sind die Elemente, die wir den Plätzen zuweisen. Jede Kastennummer kann auf jedem der 4 Plätze auftreten, also können wir das Problem als Permutation mit Wiederholung auffassen:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 16 & 16 & 16 & 16 \end{array}$$

und wir haben

$$N^n = 16^4$$

mögliche Weisen der Verteilung der 4 Teilchen auf die 16 Kästchen. Wegen der Annahme, dass jedes Element mit der Wahrscheinlichkeit $1/N$ in jedem beliebigen Kästchen sein kann, sind alle N^n Folgen gleich wahrscheinlich. Unter a) war nun nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, mit der sich alle n Teilchen in verschiedene Kästchen befinden, also in unserer Notation keine Kästchennummer mehr als einmal vorkommt. Man sieht sofort dass dies der Fall der Permutation der Kästchennummern ohne Wiederholung ist, da nun keine Kästchenzahl auf einem der 4 Plätze wiederholt vorkommen darf, sondern alle unterschiedlich sein müssen, denn dies bedeutet ja, dass die Teilchen in unterschiedlichen Kästchen liegen. Also haben wir

$$\frac{N!}{(N-n)!} = \frac{16!}{12!}$$

Fälle, in denen die n Teilchen alle in unterschiedlichen Kästchen liegen. Damit ist die Wahrscheinlichkeit über

$$P = \frac{\frac{N!}{(N-n)!}}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!} \tag{2.22}$$

gegeben.

Für Fragestellung b) betrachten wir die möglichen Folgen, die man mit den 4 unterscheidbaren Teilchen über 4 feststehende Kästchen erzeugen kann. Dies sind offenbar ja $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ Folgen. Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{n!}{N^n}.$$

Problem 2.27 (Bose-Einstein-Statistik) *Wir betrachten nun folgende Modifikation der vorherigen Problemstellung. Die Teilchen werden als ununterscheidbar angesehen. Somit sind alle Fälle identisch, die durch Vertauschen der Teilchen ineinander übergehen. Wichtig ist nur, wie viele Teilchen in ein Kästchen fallen, nicht jedoch, welche es sind. Wie lauten die Wahrscheinlichkeiten für den Fall, dass sich*

a) *in beliebigen n Kästchen je 1 Teilchen*

b) *in n vorher benannten Kästchen je 1 Teilchen befindet*

nun?

Die möglichen Fälle sind also offenbar alle verschiedenen Verteilungen der Teilchen auf die Kästchen, die sich durch verschiedene Häufigkeiten der Kästchenbesetzungen auszeichnen. Wir veranschaulichen uns die Situation für $N = 4, n = 2$. Wir stellen fest, in welchen der 4

Kästchen Teilchen liegen. Dafür gibt es folgende Möglichkeiten:

$$\begin{array}{cccc} 11 & 22 & 33 & 44 \\ 12 & 13 & 14 & \\ 23 & 24 & & \\ 34 & & & \end{array}$$

Das heisst, wir betrachten die möglichen Kombinationen der $N = 4$ Kastennummern zur Ordnung $n = 2$ mit Wiederholung. In beliebigen n Kästchen liegt genau *ein* Teilchen, wenn wir die Wiederholung der Kästchennummer nicht zulassen. Dies sind alle Fälle in dem Anordnungsdreieck ohne die erste Zeile. Es sind alle Kombinationen der $N = 4$ Elemente zur Ordnung $n = 2$ ohne Wiederholung. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit für den Fall a) über

$$P = \frac{\binom{N}{n}}{\binom{N+n-1}{n}} = \frac{\frac{N!}{n!(N-n)!}}{\frac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!}} = \frac{N!(N-1)!}{(N-n)!(N+n-1)!}$$

gegeben.

Für den Fall b) ist ja nur eine Kombination von Kastennummern günstig, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{1}{\binom{N+n-1}{n}} = \frac{n!(N-1)!}{(N+n-1)!}.$$

Der Vergleich der Bose-Einstein mit der Boltzmann-Statistik zeigt, wie wichtig es ist, welche Ereignisse als gleichwahrscheinliche Elementarereignisse angesehen werden. In der Bolzmann-Statistik sind es die verschiedenen möglichen Permutationen der Kästchenbesetzungen, da die Teilchen als identifizierbar aufgefasst werden. In der Bose-Einstein Statistik fasst man nur den Zustand der Besetzung eines Kästchens (Ortsquadranten) mit einem Teilchen als identifizierbar auf, nicht aber ein Teilchen selbst. Diese verschiedenen Annahmen führen auch zu verschiedenen Resultaten in der Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Besetzung von Ortsquadranten mit Teilchen.

Problem 2.28 *8 Personen werden gebeten, sich einen der 26 Buchstaben des Alphabets zu merken.*

a) *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens 2 Leute denselben Buchstaben gemerkt haben?*

b) *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich m Leute denselben Buchstaben gemerkt haben?*

Fragestellung a) kennen wir schon aus dem Geburtstagsproblem und der Boltzmann-Statistik. Es ist

$$P(\text{mindestens 2 gleiche Buchstaben}) = 1 - P(\text{alle Buchstaben verschieden}).$$

Definieren wir $N = 26$, $n = 8$, dann gibt es

$$N^n = 26^8$$

Möglichkeiten wie sich die 8 Leute Buchstaben merken können. Wenn sie sich alle verschiedene Buchstaben merken, gibt es

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 19 = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot N - n + 1$$

also

$$\frac{N!}{(N-n)!}$$

Möglichkeiten. Damit ist

$$P = 1 - \frac{\frac{N!}{(N-n)!}}{N^n} = 1 - \frac{N!}{N^n(N-n)!} = 1 - \frac{26!}{26^8(26-8)!} = 1 - 0.302 = 0.698$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit, genau wie im Geburtstagsproblem und in der Boltzmann-Statistik.

Um b) zu beantworten, mache man sich das Problem am besten mit einer kleinen Zeichnung klar (s. Abb. 2.7). Wir setzen zur Veranschaulichung, dass sich $m = 3$ Leute denselben

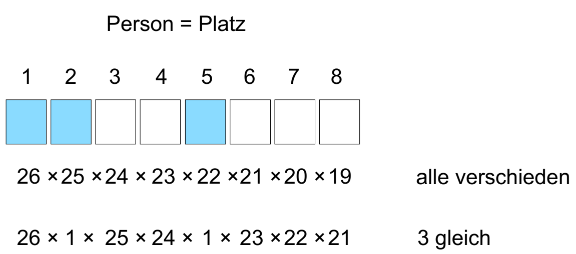

Abbildung 2.7: Die Reduktion der möglichen Permutationen durch Besetzung von Plätzen mit demselben Element.

Buchstaben gemerkt haben. Wir betrachten hier, dass sich die Personen 1, 2 und 5 denselben Buchstaben gemerkt haben (das ist beliebig und das Ergebnis hängt hiervon nicht ab). Dies bedeutet, dass es 26 mögliche Buchstaben für die Personen 1, 2 und 5 *gemeinsam*, also als 3er

Gruppe gibt, sich einen Buchstaben zu merken, dann 25 Möglichkeiten für Person 3, 24 für Person 4, usw., da diese sich ja andere merken müssen. Durch die Tatsache, dass sich 3 Personen denselben Buchstaben gemerkt haben, hat sich offenbar die Anzahl der unterscheidbaren Plätze reduziert und wir haben nun nur noch

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 21$$

Buchstabenpermutationen, allgemein

$$N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot (N-n+m) = \frac{N!}{(N-n+m-1)!}$$

Permutationen. Hierin ist m die Grösse der Gruppe von Plätzen, auf denen dasselbe Element auftaucht, bei $m = 1$ ergibt sich wieder die bekannte Formel

$$\frac{N!}{(N-n)!}$$

für die Permutation ohne Wiederholung. Dies ist jedoch erst die Lösung für eine feste Platzverteilung der verschiedenen und gleichen Elemente. Da wir die n Plätze in 2 Gruppen unterteilen können, nämlich in $(n-m)$ Plätze, auf den verschiedene Buchstaben stehen und m Plätze, auf denen die gleichen auftauchen, haben wir insgesamt

$$\frac{N!}{(N-n+m-1)!} \cdot \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Möglichkeiten, dass sich m Leute von den n Leuten gleiche Buchstaben merken. Mit den Zahlen $N = 26, n = 8, m = 3$ ergibt sich

$$\frac{26!}{(26-8+3-1)!} \cdot \frac{8!}{(8-3)!3!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 21 \cdot 8 \cdot 7 = 9282873600.$$

Damit haben wir für die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{9282873600}{28^8} = 0.0444524.$$

De hier gefunde Lösungsweg lässt sich übrigens auf das Problem anwenden, die Anzahl der verschieden Permutationen beim Würfeln mit n Würfeln ($N = 6$) zu finden, wenn m Würfel dieselbe Augenzahl haben.

Problem 2.29 *Es werden 3 Würfel geworfen. 2 von Ihnen zeigen gleiche Augenzahl. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis?*

Anhand der obigen Lösung machen wir uns analog klar: Es gibt $6 \cdot 5 \cdot 1$ Möglichkeiten für die Augenzahlenfolge auf einer festen Zuordnung der 3 Plätze (Würfel). Nennen wir die gleichen Würfel "a" und den anderen "b", so können sich die 3 möglichen Abfolgen

$$\begin{matrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{matrix}$$

ergeben. Also erhalten wir $6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$ Möglichkeiten. Durch Anwendung der obigen Formel haben wir analog

$$\frac{6!}{(6-3+2-1)!} \cdot \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{6!}{4!} \cdot \frac{3!}{2!1!} = 30 \cdot 3 = 90.$$

Damit haben wir

$$P = \frac{90}{6^3} = \frac{90}{216} = 0.416667$$

eine nicht eben kleine Wahrscheinlichkeit hierfür.

Problem 2.30 *Man löse das hypergeometrische Auswahlproblem unter Berechnung der möglichen Reihenfolgen!*

Die Auswahlwahrscheinlichkeit wird mit der hypergeometrischen Formel gemäss

$$P = \frac{\text{Anzahl günstige Kombinationen}}{\text{Anzahl mögliche Kombinationen}}$$

bestimmt. Selbstverständlich kann man ebenso

$$P = \frac{\text{Anzahl günstige Reihenfolgen}}{\text{Anzahl mögliche Reihenfolgen}} = \frac{\Sigma_G}{\Sigma_M}$$

bestimmen. Zunächst gilt für die Anzahl der möglichen Reihenfolgen

$$\Sigma_M = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Dies ist ja

$$\Sigma_M = \binom{N}{n} n! = \frac{N!}{(N-n)!n!} \cdot n! = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Für die günstigen Fälle bestimmen wir die Reihenfolgen zunächst getrennt für die "Targetgruppe" mit m Elementen und die "Non-Targetgruppe" mit $n-m$ Elementen.

$$\begin{aligned} \Sigma_{GT} &= \tbinom{M}{m} \cdot m! = \tfrac{M!}{(M-m)!} \\ \Sigma_{GNT} &= \tbinom{N-M}{n-m} \cdot (n-m)! = \tfrac{(N-M)!}{(n-m)!} \end{aligned}$$

Die n Plätze werden nun unter der “Targetgruppe” und der “Non-Targetgruppe” aufgeteilt, dafür gibt es

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Möglichkeiten. Also ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{\frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \binom{M}{m} \cdot m! \cdot \binom{N-M}{n-m} \cdot (n-m)!}{\binom{N}{n} n!}.$$

Und nach Kürzen erhalten wir

$$P = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

die hypergeometrische Formel.

Kapitel 3

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Ereignisse kann man sich grundsätzlich als miteinander verbunden denken, d.h. die Strukturiertheit eines Komplexes von Ereignissen hat grundsätzlich damit zu tun, dass sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses verändert, wenn ein oder mehrere andere Ereignisse eingetreten sind. Wir sprechen von *bedingten Wahrscheinlichkeiten*, wenn wir die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen explizit in Abhängigkeit vom Eintreten oder Nichteintreten anderer Ereignisse betrachten. Wir wenden uns zunächst folgender Definition zu.

Definition 3.1 (Bedingte Wahrscheinlichkeit) *Gegeben seien zwei Ereignisse A,B. Die Wahrscheinlichkeit*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{3.1}$$

heisst bedingte Wahrscheinlichkeit von B gegeben A.

Die Bedeutung der Definition wird durch Abb. (3.1) veranschaulicht.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von sowohl A als auch B, geteilt durch die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von B. Für Laplace Wahrscheinlichkeiten ist dies die Anzahl der Fälle des gemeinsamen Eintretens der Ereignisse A und B, bezogen auf die Anzahl der Fälle, die günstig für das Ereignis A sind. Ein kleines Beispiel verdeutlicht dies.

Problem 3.1 *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen zweier Würfel eine Augensumme von 6 zu erhalten, wenn einer der beiden Würfel eine 2 zeigt?*

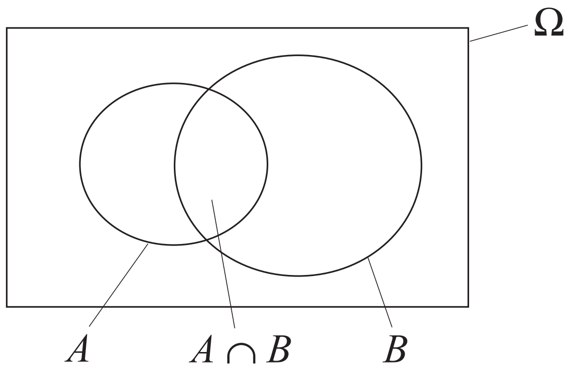

Abbildung 3.1: Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ ist definiert als der Anteil der Wahrscheinlichkeit des Schnittereignisses $A \cap B$ an der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.

Wir definieren die Ereignisse

A : "ein Würfel zeigt 2"

B : "Augensumme = 6"

und betrachten die hierfür günstigen Elementarereignisse:

2. Würfel \ 1. Würfel	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	$\boxed{6}$	7
2	3	4	5	$\boxed{6}$	7	8
3	4	5	$\boxed{6}$	7	8	9
4	5	$\boxed{6}$	7	8	9	10
5	$\boxed{6}$	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

In der Tabelle sind die für Ereignis A günstigen Elementarereignisse mit Kreisen, die für Ereignis B günstigen Elementarereignisse mit Quadraten und die für das Schnittereignis $A \cap B$ günstigen Elementarereignisse mit beiden Symbolen versehen und zusätzlich farblich markiert. Wir sehen durch Abzählen:

$$P(A) = \tfrac{11}{36} \qquad P(B) = \tfrac{5}{36} \qquad P(A \cap B) = \tfrac{2}{36}.$$

Und wir haben daher für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11}.$$

Wir betrachten ein weiteres Beispiel.

Problem 3.2 *Urne A enthalte 2 rote, 2 schwarze und 4 weisse Kugeln. Urne B enthalte 1 rote 1 schwarze und 3 weisse Kugeln. Es werde zufällig eine Urne gewählt und eine Kugel entnommen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel aus Urne A entnommen wurde, wenn wir wissen, dass eine weisse Kugel gezogen wurde?*

Das Problem vergegenwärtigt man sich mit einem Ereignisbaum (s. Abb. (3.2)). Bezeichnen

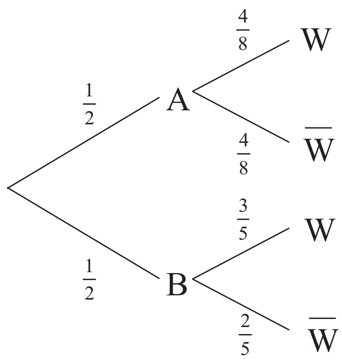

Abbildung 3.2: Der Ereignisbaum mit den Wahrscheinlichkeiten des Wählens jeder Urne und des Wählens einer weissen Kugel unter der Bedingung, aus der jeweiligen Urne entnommen zu haben.

wir mit "W" das Ereignis, eine weisse Kugel zu ziehen, haben wir in der Problemstellung die Wahrscheinlichkeiten

$$P(A) = \tfrac{1}{2} \qquad P(B) = \tfrac{1}{2} \qquad P(W|A) = \tfrac{4}{8} \qquad P(W|B) = \tfrac{3}{5}$$

Es führen zwei Wege zu dem Ereignis W, nämlich

$$W = (A \cap W) \cup (B \cap W)$$

beide sind disjunkt, so dass gilt

$$P(W) = P(A \cap W) + P(B \cap W)$$

und wegen der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit (3.1) folgt

$$\begin{aligned} P(A \cap W) &= P(W|A) \cdot P(A) = \tfrac{4}{8} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} \\ P(B \cap W) &= P(W|B) \cdot P(B) = \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{10} \end{aligned}$$

und wir haben

$$P(W) = P(A \cap W) + P(B \cap W) = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{11}{20}$$

für die Wahrscheinlichkeit, überhaupt eine weisse Kugel zu ziehen. Gefragt ist aber nach der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A|W)$. Für diese gilt nach den obigen Überlegungen offensichtlich

$$P(A|W) = \frac{P(A \cap W)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{20}} = \frac{5}{11}.$$

Man bemerke, dass man, wenn man die hier auftretenden Beziehungen nutzt, die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|W)$ offenbar zu

$$P(A|W) = \frac{P(W|A) \cdot P(A)}{P(W|A) \cdot P(A) + P(W|B) \cdot P(B)}$$

erhält. Wir kommen hierauf zurück, wenn wir den Satz von Bayes behandeln. Zunächst eine weitere Problemstellung.

Problem 3.3 (Monty-Hall Dilemma) *In einer Spielshow gibt es einen Kandidaten, der vor drei verschlossenen Türen steht. Hinter einer der drei Türen ist ein Auto (das man gerne gewinnen würde), hinter den anderen beiden Türen steht eine Ziege (die man lieber nicht gewinnen würde). Der Kandidat wählt eine Tür. Daraufhin öffnet der Moderator eine andere Tür, hinter der eine Ziege zum Vorschein kommt. Der Moderator lässt dem Kandidaten nun die Option, sich eventuell doch für die andere noch geschlossene Tür zu entscheiden oder bei seiner Wahl zu bleiben. Wie sollte der Kandidat sich entscheiden, sollte er bei seiner Wahl bleiben oder wechseln oder ist es gleich gut, egal, wofür er sich entscheidet?*

Dies ist ein bekanntes ”Puzzle”, in dem es um bedingte Wahrscheinlichkeiten geht. Intuitiv ist man geneigt, die Chance der beiden verschlossenen Türen als nun gleich anzunehmen, nachdem der Moderator die Information gegeben hat. Aber, dies ist nicht so. Man gelangt zu der richtigen Lösung über einen Ereignisbaum (s. Abb. 3.3). Nehmen wir an, der Kandidat habe Tür Nr. 1 gewählt (das ist egal, das Lösungsschema hängt hiervon nicht ab). Dann hat der Moderator die Wahl, Tür 2 oder Tür 3 zu öffnen, für beides besteht die Wahrscheinlichkeit 1/2. Da beide Möglichkeiten disjunkt sind, ist die Chance, dass man das Auto gewinnt, wenn man nicht wechselt

$$P(A|NW) = P(T_1) \cdot P(M_2|T_1) + P(T_1) \cdot P(M_3|T_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Hier steht M_i für ”Moderator öffnet Tür Nr. *i*”. Ist das Auto aber hinter Tür 2 oder Tür 3, so ist die erfolgreiche Strategie, zu wechseln. Hierfür haben wir

$$P(A|W) = P(T_2) \cdot P(M_3|T_2) + P(T_3) \cdot P(M_2|T_3) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

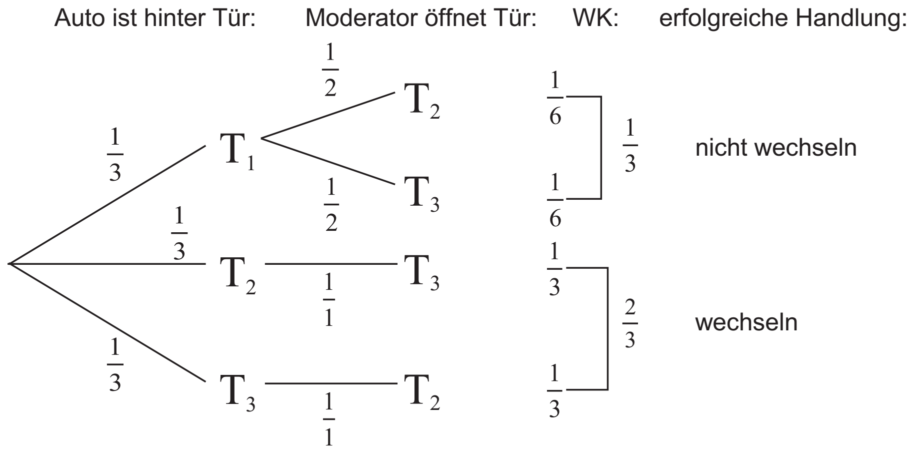

Abbildung 3.3: Der Ereignisbaum zum Monty-Hall Dilemma. Erklärung im Text.

(Der Moderator hat in diesen Fällen keinen Freiheitsgrad mehr und muss eine bestimmte Tür öffnen.) Also ist die beste Strategie, zu wechseln. Die Chance, das Auto zu gewinnen, verdoppelt sich durch die Änderung der ersten Entscheidung. Das klingt paradox, ist aber so, da die Wahrscheinlichkeit der Handlung des Moderators, welche Tür er öffnet, durch die a-priori Wahlchance der Türen bestimmt ist.

Wir wenden uns nun der folgenden Definition zu.

Definition 3.2 (Stochastische Unabhängigkeit) *Gilt für zwei Ereignisse A, B, dass*

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \\ P(B|A) &= P(B) \end{aligned} \tag{3.2}$$

so heissen die Ereignisse stochastisch unabhängig.

Bei unabhängigen Ereignissen wird also die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses nicht durch das Eintreten oder Nichteintreten des anderen Ereignisses beeinflusst.

Aus dieser Definition ergibt sich eine wichtige Folgerung. Es gilt

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{A} = P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{3.3}$$

und

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{A} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{3.4}$$

und die Folgerung

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{3.5}$$

heisst *Multiplikationssatz* für stochastisch unabhängige Ereignisse.

Wenn die Ereignisse A, B unabhängig sind, was kann man sagen über die wechselseitige Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der Ereignisse $(\overline{A}, \overline{B}), (\overline{A}, B), (A, \overline{B})$? Wir betrachten exemplarisch die Beziehung von $(\overline{A}, \overline{B})$. Es gilt mit de Morgans Gesetz

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \tag{3.6}$$

Damit können wie schreiben

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \\ &= (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) \\ &= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \end{aligned}$$

d.h. $(\overline{A}, \overline{B})$ ist ebenfalls ein Paar von stochastisch unabhängigen Ereignissen. Auf ähnlichem Wege zeigt man, dass aus der Unabhängigkeit von A und B ebenfalls die Unabhängigkeit von A und $\overline{B}$ sowie die Unabhängigkeit von B und $\overline{A}$ folgt.

Wir betrachten Beispiele zur Verdeutlichung der stochastischen Unabhängigkeit.

Problem 3.4 *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, im 2. Wurf eine "6" zu Würfeln, wenn man bereits im ersten Wurf eine "6" gewürfelt hat?*

Wir haben

$$P(\text{1. Wurf "6"}) = \tfrac{1}{6} \qquad P(\text{2. Wurf "6"}) = \tfrac{1}{6}$$

und da der Sechserpasch nur ein Ereignis von 36 möglichen ist,

$$P(\text{1. Wurf "6"} \cap \text{2. Wurf "6"}) = \frac{1}{16}$$

haben wird für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(\text{2. Wurf "6"}|\text{1. Wurf "6"}) = \frac{P(\text{1. Wurf "6"} \cap \text{2. Wurf "6"})}{P(\text{1. Wurf "6"})} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

und dies ist offenbar $P(\text{2. Wurf "6"})$, also sind die Ereignisse unabhängig, weil die Wahrscheinlichkeit, im 2. Wurf eine Sechs zu haben, nicht dadurch beeinflusst wird, ob man bereits im ersten eine hatte. Man verifiziert auch direkt den Multiplikationssatz

$$P(\text{1. Wurf "6"} \cap \text{2. Wurf "6"}) = P(\text{1. Wurf "6"}) \cdot P(\text{2. Wurf "6"}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Ein weiteres Beispiel.

Problem 3.5 *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die junge Königin bei der 5. Geburt zum Entzücken ihres königlichen Gemahls dem Reich einen Thronfolger spendet, wenn die 4 Geburten vorher alles kleine Prinzessinnen waren, die über die Mitgift das Staatssäckel schrumpfen lassen? Was wird der Hofstatistiker antworten?*

Die Antwort ist schnell gefunden, wenn man für die Geburt von Jungen und Mädchen das Münzwurfmodell anlegt, bei dem jeder Wurf ein vom vorherigen Wurf unabhängiges Ereignis darstellt. So ist

$$P(\text{4 Geburten vorher Mädchen}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 .$$

Das ist zwar eine sehr unwahrscheinliche Folge, aber sie ist ja unglücklicherweise bereits eingetreten und damit gilt

$$P(\text{5. Geburt Junge}|\text{4 Geburten vorher Mädchen}) = \frac{P(\text{5. Geburt Junge} \cap \text{4 Geburten vorher Mädchen})}{P(\text{4 Geburten vorher Mädchen})}$$

und dies ist wegen der Unabhängigkeit

$$P(\text{5. J}|\text{4 M}) = \frac{P(\text{5. J}) \cdot P(\text{4 M})}{P(\text{4 M})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$$

genau die Chance, einen Jungen oder ein Mädchen zu gebären. Also kein Trost vom Hofstatistiker in diesem Fall.

Dieses Beispiel bringt uns zu der Betrachtung einer Folge unabhängiger Versuche, die ein wichtiges statistisches Modell für Vorgänge darstellt, die überall anzutreffen sind.

3.1 Folgen unabhängiger Versuche

Wir betrachten als ein einfachen beispielhaften Vorgang da n malige Werfen einer fairen Münze.

Problem 3.6 (*n* maliger Münzwurf) *Man werfe eine faire Münze n mal hintereinander. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau k mal "Kopf" erscheint?*

Wir betrachten zunächst die Anzahl der günstigen Fälle. Wir setzen zur Veranschaulichung $n = 8, k = 5$ und betrachten die Anzahl der möglichen Realisierungen (s. Abb. 3.4). Gefragt ist offenbar nach der Anzahl der möglichen Permutationen auf $n = 8$ Plätzen, wobei man

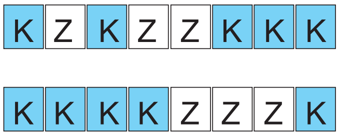

Abbildung 3.4: Zwei mögliche Realisierungen eines $n = 8$ maligen Münzwurfes, bei dem $k = 5$ mal "Kopf" erscheint.

$n_1 = k$ mal das Element "K" verwendet und $n_2 = n - k$ mal "Z" anordnet. Man schreibt sozusagen ein 8 Buchstabenwort, bei dem n_1 und n_2 Buchstaben nicht wohlverschieden sind und $n = n_1 + n_2 = k + (n - k)$ gilt. Mit (2.10) haben wir dafür

$$\frac{n!}{n_1! n_2!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Möglichkeiten, also dieselbe Anzahl, wie wir sie aus der Kombination von k Elementen aus n Elementen erhalten. Genau diese Anzahl ergibt sich, wenn wir betrachten, wie viele Teilmengen der Ordnung k man aus einer n elementigen Menge bilden kann und dabei den binären Baum mit k Auswahlebenen zugrundelegen (s. 2.5). Die Anzahl der möglichen Fälle sind nun alle Permutationen, die man mit 2 Elementen ("*K*" und "Z") auf n Plätzen bilden kann, also haben wir

$$P(k = 3 | n = 8) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \tag{3.7}$$

als Wahrscheinlichkeit für k "Erfolge" bei n Versuchen im Münzwurf, also bei zwei alternativen exakt gleichwahrscheinlichen Ereignissen.

Es stellt sich die Frage, wie man Folgen unabhängiger Versuche behandelt, denen zwar 2 dichotome aber nicht gleichwahrscheinliche Ereignisse zugrundeliegen, also

$$q = 1 - p \quad \text{aber} \quad p \neq q$$

gilt. So können wir z.B. beim Würfeln

$$\begin{array}{rcccl} P(\text{"6"}) & = & p & = & \frac{1}{6} \\ P(\text{"keine 6"}) & = & 1 - p & = & \frac{5}{6} \end{array}$$

betrachten. Wir können nun, analog zu Folgen von "K" und "Z", die möglichen Abfolgen von p und q betrachten. Jede bestimmte Folge aus *p*'s und *q*'s hat eine Wahrscheinlichkeit, die sich durch einfaches Aufmultiplizieren der Werte in der Folge ergibt, da die einzelnen Ereignisse ja unabhängig sind. Wir betrachten für $n = 3$ alle möglichen Folgen über den mittlerweile ja schon gut bekannten binären Baum (s. 3.5). Wir betrachten als Beispiel hier die Wahrschein-

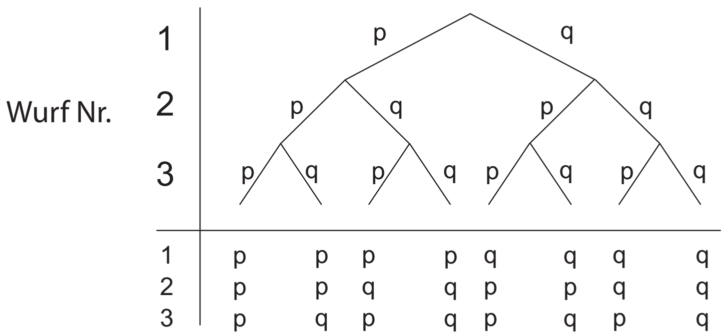

Abbildung 3.5: Die möglichen Abfolgen der komplementären Grundwahrscheinlichkeiten p und q für eine Folge von 3 unabhängigen Versuchen, veranschaulicht über den binären Baum.

lichkeit, $k = 2$ mal eine "6" zu Werfen bei $n = 3$ Würfen. Da sich die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Folge über den Multiplikationssatz (3.5) ergibt und alle Folgen disjunkt sind, haben wir hierfür

$$\begin{aligned} P(k=2|n=3) &= ppq + pqp + qpp \\ &= \tbinom{3}{2} p^2 q^{3-2} \end{aligned}$$

und allgemein haben wir

$$P(k|n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{3.8}$$

für die Wahrscheinlichkeit, k Erfolge bei n Versuchen zu erzielen. Die ist die Wahrscheinlichkeit der sog. "Bernoulli-Folge", (3.8) gibt sie über die Wahrscheinlichkeitsfunktion (Wahrscheinlichkeitsdichte) der sog. *Binomialverteilung* an. Wegen der Disjunktheit der Folgen hat man sofort

$$P(\text{höchstens } k|n) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \tag{3.9}$$

und

$$P(\text{mindestens } k|n) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j}. \tag{3.10}$$

Man beachte, dass die Zufallsvariable k den Stichprobenraum vollständig partitioniert (s. Abb. 1.4). Daher muss gelten

$$P(\text{mindestens } k|n) = 1 - P(\text{höchstens } k-1|n). \tag{3.11}$$

Wir sehen nun auch den Zusammenhang von (3.8) und (3.7). Setzt man in (3.8) $p = q = 1/2$ folgt

$$P(k|n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

eben die Beziehung (3.7).

3.2 Der Satz von Bayes

Wir stellen uns vor, der Stichprobenraum Ω sei durch Ereignisse A_i vollständig partitioniert. Wir betrachten ein Ereignis B aus diesem Stichprobenraum (s. Abb. 3.6). Offensichtlich gilt

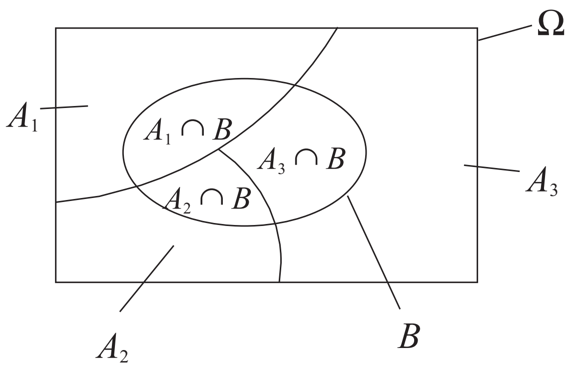

Abbildung 3.6: Wird der Stichprobenraum Ω durch n Ereignisse A_i vollständig partitioniert, so wird ein Ereignis B durch die Schnittmengen von B mit den A_i vollständig partitioniert.

für das Ereignis B

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_i \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B). \tag{3.12}$$

Da die A_i disjunkt sind, folgt

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B). \tag{3.13}$$

Da

$$P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)} \tag{3.14}$$

ist, folgt

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i). \tag{3.15}$$

Die Beziehung (3.15) ist als *Satz der totalen Wahrscheinlichkeit* bekannt. Ein Beispiel veranschaulicht diesen Satz.

Problem 3.7 *Gegeben seien 3 Typen von Urnen, A_1, A_2 und A_3. Wir haben*

- *2 Urnen A_1: je 2 weisse und 1 schwarze Kugel;*
- *1 Urnen A_2: 10 schwarze Kugeln;*
- *2 Urnen A_3: je 3 weisse und 1 schwarze Kugel.*

Es werde zufällig eine der 5 Urnen gewählt und eine Kugel entnommen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie weiss ist (Ereignis B)?

Offensichtlich partitionieren die 3 Urnentypen den Stichprobenraum und die Schnittmengen mit B das Ereignis B, denn wenn man eine weisse Kugel zieht, muss sie aus einer Urne des Typs A_1, A_2 oder A_3 entstammen, eine andere Möglichkeit gibt es nicht. In diesem speziellen Problembeispiel scheidet die Urne vom Typ A_2 aus, da sie keine weissen Kugeln enthält. Die Partitionierung ist also so, wie in Abb. (3.7) dargestellt.

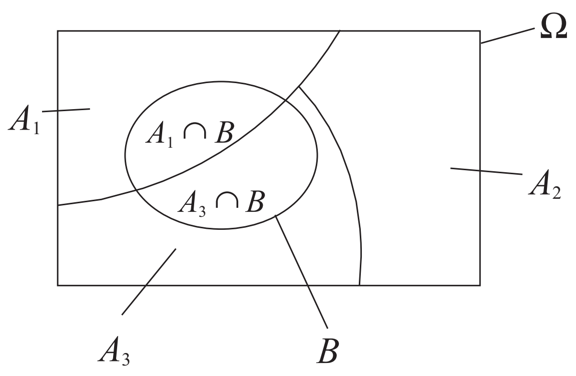

Abbildung 3.7: Die Partitionierung des Stichprobenraumes und die Lage des Ereignisses B ("weisse Kugel") entsprechend dem Problembeispiel (3.7).

Wir zeichnen auch den zugehörigen Ereignisbaum (s. Abb. 3.8). Es führen 3 Pfade zu einer weissen Kugel, dies sind die zugehörigen Schnittmengen des Ereignisses B mit jedem der Ereignisse A_i, die den Stichprobenraum partitionieren. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
P(B \cap A_1) &= P(A_1) \cdot P(B|A_1) = \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{2}{3} = 0.27 \\
P(B \cap A_2) &= P(A_2) \cdot P(B|A_2) = \tfrac{1}{5} \cdot 0 = 0.00 \\
P(B \cap A_3) &= P(A_3) \cdot P(B|A_3) = \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{3}{4} = 0.30
\end{aligned}$$

Über den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir somit

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(B|A_i) = 0.20 + 0.0 + 0.30 = 0.57$$

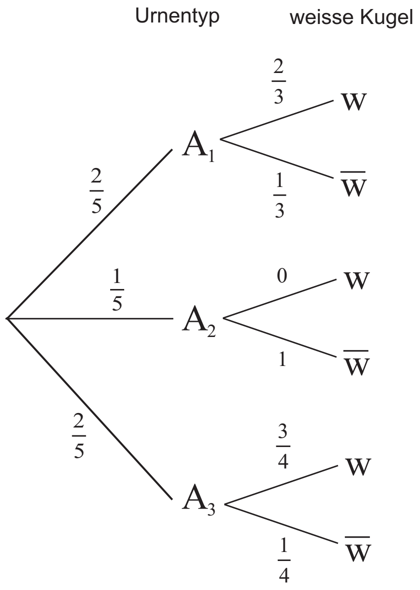

Abbildung 3.8: Der Ereignisbaum zum Problem der Entnahme einer weissen Kugel aus 3 Urnen mit verschiedenen a-priori Wahrscheinlichkeiten.

für die Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel zu ziehen.

Anknüpfend an dieses Beispiel können wir direkt den Satz von Bayes entwickeln, indem wir fragen: *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel aus Urne A_i entnommen wurde, wenn wir wissen, dass sie weiss ist?* Wir fragen damit also nach der Wahrscheinlichkeit eines der Ereignisse, die den Stichprobenraum partitionieren, gegeben die Beobachtung des Ereignisses B. Gefragt ist nach

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

und wegen (3.14) können wir dies als

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

schreiben. Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit (3.15) folgt dann

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)} \tag{3.16}$$

und dies ist der *Satz von Bayes*.

Wir können ihn direkt auf das Beispielproblem anwenden. Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Urnentyps, wenn eine weisse Kugel gezogen wurde, ist

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \tfrac{0.27}{0.57} &= &= 0.474 \\ P(A_2|B) &= \tfrac{0.00}{0.57} &= &= 0.000 \\ P(A_3|B) &= \tfrac{0.30}{0.57} &= &= 0.526 \end{aligned}$$

und die Wahrscheinlichkeiten ergänzen sich zu 1 wegen des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit.

Wir betrachten ein weiteres Beispiel.

Problem 3.8 *60% einer Stichprobe gelten als erfolgreich im Beruf. Von den Berufserfolgreichen haben 80% einen vorher durchgeführten Berufseignungstest bestanden. Von denen, die nicht als berufserfolgreich gelten, haben 40% den Test bestanden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man vom Bestehen des Tests auf Berufserfolg schliessen?*

Wir können uns das Problem folgendermaßen geartet denken. Wir haben einen Test, den man bestehen kann (T) oder nicht $\overline{T}$. Anhand des Testes will man die Chance, einen Berufserfolgreichen auszuwählen, gegenüber der reinen Zufallsauswahl verbessern. Man hofft ja, dass unter denen, die den Test bestehen, sich ein grösserer Anteil von Personen befindet, die berufserfolgreich sind, als in der Population. Das Bestehen/Nichtbestehen des Tests muss also mit dem Merkmal Berufserfolg/Nichterfolg korrelieren, ansonsten nützt der Test nichts. Berufserfolg hat hier die Funktion einer Hypothese (H), Nichterfolg die der Gegenhypothese $\overline{H}$ und wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit der Hypothese H (Berufserfolg) gegeben die Beobachtung T ("Test bestanden"), $P(H|T)$. Diese Wahrscheinlichkeit heisst *"a-posteriori"* Wahrscheinlichkeit, es ist die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese gegeben ein Datum (Beobachtung). Ohne die Beobachtung hat die Hypothese auch eine gewisse Wahrscheinlichkeit des Eintretens, nämlich die sog. *"a-priori"* Wahrscheinlichkeit, $P(H)$. In unserem Falle ist dies die Grundrate, mit der Berufserfolgreiche in der Stichprobe vertreten sind. Daneben gibt es noch die Wahrscheinlichkeit einer Beobachtung unter der Voraussetzung, dass eine bestimmte Hypothese gilt, also z.B. $P(T|H)$. Dies ist eine sog. *"Likelihood"*. Zusammengefasst:

a-priori WK	a-posteriori WK	Likelihood
$P(H)$	$P(H\|T)$	$P(T\|H)$
$P(\overline{H})$	$P(\overline{H}\|T)$	$P(\overline{T}\|H)$
	$P(H\|\overline{T})$	$P(T\|\overline{H})$
	$P(\overline{H}\|\overline{T})$	$P(\overline{T}\|\overline{H})$

In der Problemstellung haben wir folgende Information gegeben:

$$P(H) = 0.6 \quad P(T|H) = 0.8 \quad P(T|\overline{H}) = 0.4$$

Da wegen $P(H) + P(\overline{H}) = 1$ direkt $P(\overline{H}) = 1 - P(H) = 1 - 0.6 = 0.4$ folgt, haben wir

$$P(T|H) = \frac{P(T \cap H)}{P(H)} \Rightarrow P(T \cap H) = P(T|H)P(H) = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48$$

und

$$P(T|\overline{H}) = \frac{P(T \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} \Rightarrow P(T \cap \overline{H}) = P(T|\overline{H})P(\overline{H}) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16.$$

Die Wahrscheinlichkeiten der Schnittmengen kann man in eine Kreuztabelle eintragen, und man erhält:

	H	$\overline{H}$	
T	0.48	0.16	0.64
$\overline{T}$	0.12	0.24	0.36
	0.60	0.40	1.00

Hieraus kann man nun direkt alle a-posteriori Wahrscheinlichkeiten ausrechnen:

$$\begin{array}{ll} P(H|T) = \frac{0.48}{0.64} = \frac{3}{4} & P(H|\overline{T}) = \frac{0.12}{0.36} = \frac{1}{3} \\ P(\overline{H}|T) = \frac{0.16}{0.64} = \frac{1}{4} & P(\overline{H}|\overline{T}) = \frac{0.24}{0.36} = \frac{2}{3} \end{array}$$

und hat damit auch die Fragestellung beantwortet: Die Wahrscheinlichkeit, Geeignete unter denen, die den Test bestanden haben zu erhalten, ist 0.75, und das ist mehr als die a-priori Wahrscheinlichkeit der Geeigneten, denn diese beträgt nur 0.6. Man beachte, dass die zugehörige Tabelle der Likelihoodfunktionen so ausssieht:

	H	$\overline{H}$		H	$\overline{H}$
T	$P(T\|H)$	$P(T\|\overline{H})$	T	0.8	0.4
$\overline{T}$	$P(\overline{T}\|H)$	$P(\overline{T}\|\overline{H})$	$\overline{T}$	0.2	0.6
	1.00	1.00		1.00	1.00

Sie ergibt sich, wenn man die Wahrscheinlichkeiten der Schnittmengen durch die a-priori Wahrscheinlichkeiten $P(H)$ bzw. $P(\overline{H})$ teilt.