Insgesamt ergeben sich damit die Transformationsgleichungen für die Drehung des Koordinatensystems um die x-Achse mit dem Winkel ϑ zu

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y\cos\vartheta + z\sin\vartheta \\ z' &= -y\sin\vartheta + z\cos\vartheta \end{aligned}$$

Die Drehung um die y-Achse in dem Drehwinkel ϑ ergibt sich analog.
Damit können wir eine beliebige Drehung im Raum herstellen.

Ein Koordinatensystem kann durch drei aufeinanderfolgende Drehungen um die x, y und z-Achse in jede beliebige Lage im Raum gebracht werden. Die neuen Koordinaten ergeben sich, wenn die drei Transformationen nacheinander durchgeführt werden. Die Reihenfolge ist beliebig.

Regel: *Transformationsgleichungen für die Drehungen eines dreidimensionalen Koordinatensystems*

Drehachse: x'-Achse, Drehwinkel ϑ

$$\begin{aligned} x' &= x\cdot\cos\vartheta + z\cdot\sin\vartheta \\ y' &= y \\ z' &= -x\cdot\sin\vartheta + z\cdot\cos\vartheta \end{aligned}$$

Drehachse y-Achse; Drehwinkel ψ

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y\cos\psi + z\sin\psi \\ z' &= -y\sin\psi + z\cos\psi \end{aligned}$$

Drehachse: z-Achse; Drehwinkel φ

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y\cos\varphi + z\sin\varphi \\ z' &= -y\sin\varphi + z\cos\varphi \end{aligned} \qquad (19.2)$$

19.3 Matrizenrechnung

Die bisher abgeleiteten Transformationsgleichungen lassen sich übersichtlicher schreiben, wenn wir den Begriff der Matrix einführen und dafür Rechenregeln aufstellen. Im Abschnitt 19.4 werden wir dann die Transformationsgleichungen in Matrizenform aufstellen. In Kapitel 20 werden wir Matrizen benutzen, um lineare Gleichungssysteme zu lösen.

Definition: *Matrix* heißt ein rechteckiges Zahlenschema reeller Zahlen der Art

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die horizontalen Zahlenreihen heißen *Zeilen* der Matrix.

Beispiel: $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & - & \cdots & - \\ - & - & \cdots & - \end{pmatrix}$$

Die vertikalen Zahlenreihen heißen *Spalten* der Matrix.

Beispiel: $$\begin{pmatrix} a_{11} & - & - & - \\ a_{21} & - & - & - \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & - & - & - \end{pmatrix}$$

Eine Matrix hat m Zeilen und n Spalten. Wir nennen sie deshalb eine $m \times n$-Matrix. Die einzelnen Zahlen heißen Matrixelemente.

Im Folgenden werden wir unsere Betrachtung weitgehend auf quadratische Matrizen beschränken, bei ihnen ist die Spaltenzahl gleich der Zeilenzahl.

Matrizen werden meist mit deutschen Buchstaben oder mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 33 & -8 \end{pmatrix} \text{ ist eine } 2 \times 2 \text{ - Matrix}$$

Wir definieren nun das Produkt eines Vektors mit einer Matrix. Dafür geben wir eine Rechenvorschrift anhand eines Beispiels an. Die Matrix sei eine 2×2-Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Der Vektor sei $\vec{r} = (x, y)$. Wir können diesen Vektor auch schreiben als $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Der Grund für die Benutzung dieser Schreibweise liegt in der übersichtlichen Darstellung des Produktes eines Vektors mit einer Matrix. Das Produkt $A \cdot \vec{r}$ ist ein neuer Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Definition: Das *Produkt $A \cdot \vec{r}$ einer Matrix A und eines Vektors $\vec{r}$* ist ein neuer Vektor $\vec{r}\,'$ mit den Komponenten

$$\vec{r}\,' = A \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

Die Komponenten x' und y' erhalten wir dadurch, daß wir Skalarprodukte zwischen den Zeilen der Matrix A und dem Vektor $\binom{x}{y}$ bilden.
x' ergibt sich als Skalarprodukt zwischen den „Vektoren“ (a_{11}, a_{12}) und $\binom{x}{y}$,
y' ergibt sich als Skalarprodukt von (a_{21}, a_{22}) und $\binom{x}{y}$.

Beispiel: Wir berechnen $A \cdot \vec{r} = \vec{r}\,'$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \binom{x}{y}$

Es ist

$$A\vec{r} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y \\ 6x + 4y \end{pmatrix}$$

Die Verallgemeinerung auf Vektoren im dreidimensionalen Raum und 3×3-Matrizen ergibt

$$A\vec{r} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

Beispiel: Zu berechnen ist $\vec{r}\,' = A \cdot \vec{r}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3z \\ 4x - 2y \\ 5z \end{pmatrix}$$

Abschließend wollen wir noch angeben, wie das Produkt $A \cdot B = C$ von Matrizen zu berechnen ist. Wir beginnen mit dem Produkt von 2×2 Matrizen.

Das folgende Schema zeigt, wie das Matrixelement C_{22} der Produktmatrix $C = A \cdot B$ entsteht: Man bildet das „skalare“ Produkt der zweiten Zeile der Matrix A mit der zweiten Spalte der Matrix B:

$$C_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}$$

Die anderen Matrixelemente werden entsprechend gebildet.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{2. Spalte} \\ & & \begin{pmatrix} b_{11} & \mathbf{b_{12}} \\ b_{21} & \mathbf{b_{22}} \end{pmatrix} \\ \text{2. Zeile} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \mathbf{c_{22}} \end{pmatrix} \end{array}$$

Beispiel: Es ist das Produkt zweier Matrizen zu bilden

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 + 2 & 35 - 2 \\ 0 + 1 & 0 - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -13 & 33 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Definition: *Produkt von 2×2-Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Das Produkt wird definiert durch

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Die Matrixelemente c_{ik} $(i = 1, 2;\ k = 1, 2)$ der Produktmatrix $C = A \cdot B$ ergeben sich, indem die i-te Zeile der Matrix A und die k-te Spalte der Matrix B als Vektoren aufgefaßt werden und das Skalarprodukt zwischen ihnen gebildet wird:

$$c_{ik} = (a_{i1}{}', a_{i2}) \cdot (b_{1k}, b_{2k}) = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{jk}$$

Die Erweiterung auf 3×3 Matrizen ist inmittelbar einsichtig. Die Matrixelemente der Produktmatrix C sind das „Skalarprodukt“ der Zeile i der Matrix A und der Spalte k der Matrix B.

Beispiel: Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen das Produkt $A \cdot B = C$ und benutzen zur Erleichterung wieder das Schema wie unten angedeutet

$$\begin{array}{r} \begin{pmatrix} 4 & 0 & \mathbf{5} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ -3 & -2 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} " & " & " \\ " & " & " \\ " & " & \mathbf{7} \end{pmatrix} \end{array}$$

Vollständiges Ausmultiplizieren ergibt:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 \; +0 \; +0 & 0 \; +0 \; +0 & 1 \cdot 5 \; +0 \; +0 \\ 0 \; +0 \; -3 \cdot 3 & 0 \; +2 \cdot 1 \; -3 \cdot 2 & 0 \; +0 \; +3 \cdot 1 \\ 0 \; +0 \; -7 \cdot 3 & 0 \; -3 \cdot 1 \; -7 \cdot 2 & 0 \; +0 \; +7 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -9 & -4 & 3 \\ -21 & -17 & 7 \end{pmatrix}$$

Das Verfahren kann auf das Produkt einer $n \times m$ Matrix mit einer $p \times n$ Matrix erweitert werden. Eine Bedingung gilt: Die Anzahl der Spalten von A muß mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmen. Auch im allgemeinen Fall kann das angegebene Schema benutzt werden.

Definition: Produkt einer $m \times n$ Matrix mit einer $n \times p$ Matrix.
Die Matrixelemente c_{ij} der Produktmatrix C sind definiert als das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors der Matrix A und des j-ten Spaltenvektors der Matrix B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß das Produkt zweier Matrizen nicht kommutativ ist, es gilt i.a. $A \cdot B \neq B \cdot A$. Der interessierte Leser kann dies am obigen Beispiel der 2×2-Matrizen leicht verifizieren.

Zum Abschluß wollen wir der Vollständigkeit halber angeben, wie die Addition zweier Matrizen und die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar definiert sind.

Definition: *Addition von Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Die Summe $A + B = C$ ist definiert als

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

Wir addieren die Matrixelemente mit gleichen Indizes.

Beispiel: $$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Definition: *Multiplikation mit einem Skalar*
Eine Matrix A wird mit einer skalaren Größe t multipliziert, indem jedes Matrixelement mit t multipliziert wird.

Das Produkt einer 2×2-Matrix A mit dem Skalar t lautet dann wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{2} \end{pmatrix}$$

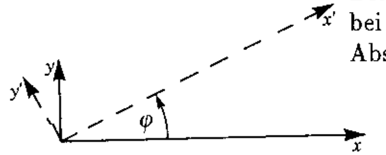
$$tA = \begin{pmatrix} ta_{11} & ta_{12} \\ ta_{21} & ta_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiel: $$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad t = 2,5$$

$$tA = \begin{pmatrix} 12,5 & -17,5 \\ 7,5 & 5 \end{pmatrix}$$

19.4 Darstellung von Drehungen in Matrizenform

Drehungen im zweidimensionalen Raum:



Die Transformationsgleichungen für die Koordinaten bei einer Drehung um den Winkel φ hatten wir in Abschnitt 19.2.1 – Regel 19.2 – abgeleitet. Es war

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}$$

Diese Transformationsgleichungen lassen sich unmittelbar als Produkt einer Drehmatrix mit dem ursprünglichen Vektor darstellen.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Beispiel: Wir drehen unser x-y-Koordinatensystem um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dann geht die x-Achse in die y-Achse und die y-Achse in die negative x-Achse über.

Setzen wir in die Drehmatrix für φ den Wert $\frac{\pi}{2}$ ein, erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatentransformation ist damit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Wir werden jetzt die Matrix für eine Gesamtdrehung bestimmen, die sich aus einer Drehung um den Winkel φ und einer Drehung um den Winkel ψ zusammensetzt.

Nach der ersten Drehung geht (x, y) über in (x', y'). Nach der zweiten Drehung geht (x', y') über in (x'', y''). Gesucht ist die Matrix für den Übergang $(x, y) \rightarrow (x'', y'')$.

Es gelten (siehe Abschnitt 19.2.2)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (1)$$

und

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Wir setzen Gleichung (1) in die Gleichung (2) ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

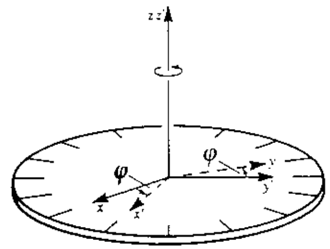
Ausmultiplizieren der Matrizen ergibt:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi & \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme für die cos- und sin-Funktionen ergibt sich die Drehmatrix für die Gesamtdrehung zu

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & \sin(\varphi+\psi) \\ -\sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$$

Drehungen im dreidimensionalen Raum:



In Abschnitt 19.2.3 hatten wir die Transformationsgleichungen für eine *Drehung* um den Winkel φ mit der *z-Achse* als Drehachse hergeleitet. Es war – Regel 19.2:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' &= z \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Transformationsgleichung in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Der Leser überlege sich, daß die Drehmatrix für eine Drehung um die y-Achse mit dem Winkel ψ die Form hat

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}$$

Schließlich hat die Drehmatrix für eine Drehung um die x-Achse um den Winkel ϑ die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Eine beliebige Drehung läßt sich durch aufeinanderfolgende Drehungen um die x, y und z-Achse bewirken. In diesem Fall wird die Transformation mit einer Drehung begonnen, das Ergebnis wird noch einmal transformiert und dieses Ergebnis wird dann ein drittes Mal transformiert.

19.5 Spezielle Matrizen

In diesem Abschnitt werden spezielle Matrizen erläutert und definiert. Manche ihrer Eigenschaften werden ohne vollständigen Beweis angegeben.

Einheitsmatrix
Die *Einheitsmatrix* ist eine quadratische Matrix der folgenden Form

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alle Elemente auf der *Hauptdiagonalen* sind Eins, alle anderen sind Null.

Multipliziert man eine Matrix A oder einen Vektor $\vec{r}$ mit der Einheitsmatrix, so bleiben die Matrix oder der Vektor unverändert erhalten.

$$\begin{aligned} E \cdot A &= A \\ E \cdot \vec{r} &= \vec{r} \end{aligned}$$

Die Eigenschaft der Einheitsmatrix folgt unmittelbar aus den Regeln der Matrizenmultiplikation und kann leicht selbst verifiziert werden.

Diagonalmatrizen
Eine *Diagonalmatrix* ist eine quadratische Matrix, deren Elemente auf der Hauptdiagonalen $\neq 0$ sind, und deren übrige Elemente gleich Null sind.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix ist also eine spezielle Diagonalmatrix.

Nullmatrix
Die *Nullmatrix* ist eine Matrix, bei der sämtliche Elemente Null sind. Sie wird mit 0 bezeichnet. Auf folgenden Zusammenhang sei hingewiesen: Aus der Gleichung $A \cdot B = 0$ folgt nicht notwendig, daß entweder $A = 0$ oder $B = 0$ ist.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Transponierte Matrix
Vertauschen wir die Zeilen und Spalten einer $m \times n$ Matrix A, so erhalten wir eine neue Matrix, die jetzt eine $n \times m$ Matrix ist. Diese Matrix heißt *transponierte Matrix* oder *Transponierte* der ursprünglichen Matrix.
Sie wird bezeichnet durch A^T oder $\tilde{A}$.

Matrix	Transponierte Matrix
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$	$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$

Aus der ersten Zeile wird die erste Spalte, aus der zweiten Zeile wird die zweite Spalte etc. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Leser kann die folgenden Behauptungen leicht selbst beweisen:

Die Transponierte einer transponierten Matrix ergibt wieder die ursprüngliche Matrix.

$$(A^T)^T = A$$

Die Transponierte eines Matrizenprodukts ist das Produkt der transponierten Matrizen.

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Allgemein gilt $(A \cdot B \cdot C \ldots Z)^T = Z^T \cdot \ldots B^T \cdot A^T$

Orthogonale Matrizen
Eine quadratische Matrix A heißt *orthogonal*, wenn sie der folgenden Bedingung genügt:

$$A \cdot A^T = E \qquad \text{(Orthogonalitätsbedingung)}$$

Betrachten wir die Gleichung $A \cdot A^T = E$. Wenn wir die Zeilen und Spalten der Matrizen A und A^T als Vektoren auffassen, und ihre Skalarprodukte berechnen, dann gilt für eine orthogonale Matrix A:

Das Skalarprodukt einer Zeile mit sich selbst ist 1.

Das Skalarprodukt einer Zeile mit einer anderen Zeile ist immer Null.

Was für Zeilen gesagt wurde, gilt auch für Spalten.

Drehmatrizen sind immer orthogonale Matrizen. Wird eine orthogonale Matrix A mit zwei Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$ multipliziert, dann bleibt deren Skalarprodukt unverändert:

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (A\vec{r}) \cdot (A\vec{s})$$

Dies bedeutet, daß bei der Transformation Längen und Winkel der Vektoren erhalten bleiben. Ein System rechtwinklinger Koordinaten wird in ein anderes rechtwinkliges Koordinatensystem überführt. Durch diese Eigenschaft ist der Name orthogonale Matrix begründet.

Singuläre Matrix
Eine Matrix heißt *singulär*, wenn ihre Determinante Null ist. Der Begriff der Determinanten wird im Kapitel 20 erläutert.

Symmetrische Matrizen und schief-symmetrische Matrizen
Eine quadratische Matrix heißt *symmetrisch*, wenn gilt: $a_{ij} = a_{ji}$. Dies bedeutet, daß die Matrix gleich ihrer Transponierten ist.

$$A = A^T$$

Eine quadratische Matrix heißt *schief-symmetrisch*, wenn gilt $a_{ij} = -a_{ji}$. Für schief-symmetrische Matrizen sind alle Elemente auf der Hauptdiagonalen Null. Es gilt:

$$A = -A^T$$

Jede quadratische Matrix kann dargestellt werden als die Summe einer symmetrischen und einer schief-symmetrischen Matrix.

Beweis: $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

Die erste Klammer ist eine symmetrische Matrix und die zweite Klammer ist eine schief-symmetrische Matrix.

Beispiel: Die Matrix A wird in eine symmetrische und in eine schief-symmetrische Matrix zerlegt:

$$A = \begin{pmatrix} 798 & 29 & 26 \\ 1 & 8 & 27 \\ 74 & 69 & 88 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 798 & 15 & 50 \\ 15 & 8 & 48 \\ 50 & 48 & 88 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 14 & -24 \\ -14 & 0 & -21 \\ 24 & 21 & 0 \end{pmatrix}$$

Spur einer Matrix
Die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen heißt *Spur* der Matrix A, abgekürzt $Sp(A)$

$$\text{Spur: } Sp(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} \ldots + a_{nn}$$

19.6 Inverse Matrix

Für eine nicht-singuläre quadratische Matrix A ist die *inverse Matrix* A^{-1} durch folgende Bedingung definiert: Das Produkt der Matrix A mit der inversen Matrix A^{-1} ergibt die Einheitsmatrix E.

Die folgenden Gleichungen gelten:

$$A \cdot A^{-1} = E \qquad \text{(Postmultiplikation mit } A^{-1}\text{)}$$

$$A^{-1} \cdot A = E \qquad \text{(Prämultiplikation mit } A^{-1}\text{)}$$

Die Berechnung der Inversen einer Matrix wird im Kapitel 20 im Abschnitt 20.1.3 beschrieben. Hier geben wir nur ein Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 17 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Leser kann selbst verifizieren, daß folgende Gleichungen gelten:

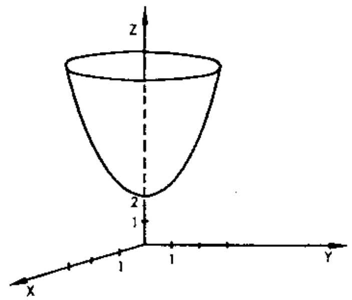
$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Eine quadratische Matrix A ist orthogonal, wenn die inverse Matrix A^{-1} gleich der transponierten Matrix A^T ist:

$$A^{-1} = A^T$$

Wenn man die Operationen mit Matrizen anhand einfacher Beispiele durchgeführt und verstanden hat, wird man sie später bei Bedarf mit Hilfe des PC und eines Algebraprogramms wie Mathematica, Maple, Derive u.a. durchführen.

19.7 Übungsaufgaben



19.1 Der Scheitelpunkt eines Paraboloids haben den Abstand 2 vom Koordinatenursprung $z = 2 + x^2 + y^2$. Geben Sie diejenige Transformation, die das Koordinatensystem derart verschiebt, daß Scheitelpunkt und Koordinatenursprung zusammenfallen.

19.2.1 Ein zweidimensionales Koordinatensystem wird um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$ gedreht. Die Transformationsmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

In welchen Vektor $\vec{r}$ wird der Vektor $\vec{r} = (2, 4)$ transformiert?

19.2.2 Ein dreidimensionales Koordinatensystem wird mit dem Winkel $\varphi = 30°$ um die z-Achse gedreht. In welchen Vektor $\vec{r}'$ geht der Vektor $\vec{r} = (3, 3, 3)$ über?

19.3 a) Die Matrizen sind zu multiplizieren

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sind zu multiplizieren.}$$

b) Zeigen Sie, daß für die beiden Matrizen aus a) die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ verschieden voneinander sind.

c) Berechnen Sie $A\vec{r}$. $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

19.4 a) Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ Berechnen Sie a) A^T und b) $(A^T)^T$

b) Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13}$

Zeigen Sie, daß $A \,.\, A^{-1} = E$.

Lösungen

19.1 $\quad x' = x \qquad y' = y \qquad z' = z - 2$

19.2.1 $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix}$

19.2.2 Die Transformationsformeln für eine Drehung um die z-Achse lauten:
$z' = z \qquad x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \qquad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$

Setzen wir $x = 3$, $y = 3$ und $z = 3$ ein, erhalten wir

$z' = 3 \qquad x' = 3\cos 30° + 3\sin 30° \qquad y' = -3\sin 30° + 3\cos 30°$

$\vec{r} = (x', y', z')$

19.3 a) $\quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

also: $A \cdot B \neq B \cdot A$

c) $\quad \begin{pmatrix} x - 2y \\ 5x + 7y \end{pmatrix}$

19.4 a) $\quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$(A^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = A$

b) $\quad A \cdot A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = E$